■ LES NOMBRES COMPLEXES

I. FORME ALGEBRIQUE

1) NOTION DE NOMBRE COMPLEXE

Activité

1°) Soit l'équation (E) : $x^2 + 4x + 5 = 0$

a) Vérifier que $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$
b) En déduire que (E) équivaut à $(x + 2)^2 = -1$
c) Cette équation a-t-elle une solution dans IR ? justifier la réponse.
d) Supposer qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et conserver les règles de calcul dans IR. Démontrer alors que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i.

2°) Résoudre de même les équations : $x^2 - 6x + 13 = 0$ et $x^2 + 5 = 0$.

Synthèse

***Définition* :** on appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + bi$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Notation et vocabulaire *:* Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ avec a et b des réels.

- L'écriture $a + bi$ est appelée **forme algébrique** de z ; a est appelé **partie réelle de z** notée **Re(z)** ; b est appelé **partie imaginaire de z** notée **Im(z)**.
- Si b = 0, alors z = a : z est donc un nombre réel. On en déduit que tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- Si a = 0 et $b \neq 0$, alors z = bi : le nombre z est dit **imaginaire pur.**

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes, on a :

- z = z' si et seulement si Re(z) = Re(z') et Im(z) = Im(z')
- z = 0 si et seulement si Re(z) = 0 et Im(z) = 0
- 0 est appelé nombre complexe nul.

Exercice d'application

Soit $z = 1 - 6i$. Déterminer les réels x et y pour que le nombre complexe z' tel que $z' = x + y + xyi$ soit égal à z.

2) OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$

a- Addition et multiplication

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes. On a:

$z + z' = (a + a') + (b + b')i$ et $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Les propriétés de ces opérations dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

b- Identités remarquables

Pour tous nombres complexes z et z' :

$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$; $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$; $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$.

Remarque : $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

On peut donc factoriser dans $\mathbb{C}$ des expressions non factorisables dans $\mathbb{R}$.

c- Application au calcul d'un quotient

Exercice : écrire sous forme algébrique $\dfrac{1-i}{-2+3i}$

Réponse : $\dfrac{1-i}{-2+3i} = \dfrac{(1-i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = -\dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$

d- Formule du binôme de Newton

Soient deux nombres complexes z et z' et n un entier naturel non nul : $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}$

Exemples : $(1 + i)^5 = 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 = -4 - 4i$

$(2 - i)^4 = 2^4 - 4.2^3 i + 6.2^2 i^2 - 4.2i^3 + i^4 = -7 - 24i$

3) NOMBRES COMPLEXES CONJUGUES

a- Définition

Soit z un nombre complexe tel que z = a + bi. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}$ = a – bi

Exemple **:** $\overline{1+i}=1-i;\overline{3-2i}=3+2i;\overline{-2+i}=-2-i.$

b- Propriété 1

Soit z un nombre complexe tel que z = a + bi. On a :

- $\bar{\bar{z}}=z$
- $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$
- $z\bar{z}=a^2+b^2$
- $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$
- z *est imaginaire pur* $\Leftrightarrow\bar{z}=-z$ *et* $z\neq 0$

Exemples **:**

- $\overline{\overline{-3+2i}}=-3+2i$
- $(-3+2i)+\left(\overline{-3+2i}\right)=-6$
- $(-3+2i)\left(\overline{-3+2i}\right)=13$
- $(-3+2i)-\left(\overline{-3+2i}\right)=4i$

c- Propriétés 2

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(i) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$

(ii) $\overline{-z}=-\bar{z}$

(iii) $\overline{zz'}=\bar{z}.\overline{z'}$

(iv) $\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{\bar{z}}(z\neq 0)$

(v) $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right)=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}(z'\neq 0)$

(vi) $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n(z\neq 0)$

Démonstration

Posons z = a +bi et z' = a' + b'i

(i) Trivial

(ii) Trivial

(iii) On sait que zz = (aa' – bb') + i(ab' + a'b).

Or on a $\bar{z}.\overline{z'}$ = (a - bi)(a' – b'i) = (aa' – bb') + i(ab' + a'b) = $\overline{zz'}$

(iv) Si $z\neq 0$, $z\times\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow\left(\overline{z\times\frac{1}{z}}\right)=1\Leftrightarrow\bar{z}.\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)=1\Leftrightarrow\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{\bar{z}}$

(v) Si z' ≠ 0, $\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right)=\left(\overline{z.\frac{1}{z'}}\right)=\bar{z}.\left(\overline{\frac{1}{z'}}\right)=\bar{z}.\frac{1}{\bar{z}'}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

(vi) Par récurrence.

4) REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

a- Affixe d'un point

***Définition*:** Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, le point M de coordonnées (a , b) est appelé **point-image** du nombre complexe z = a + b*i*. Réciproquement, le nombre complexe z = a + b*i* est appelé **affixe** du point M. On écrit **M(z)** et on lit : « M d'affixe z = a + b*i* ».

***Exemple* :** Placer les points A(1 + *i*) et $B\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$

***Remarques* :**

- Deux nombres complexes conjugués z et $\bar{z}$ ont des points images symétriques par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$
- L'axe $(O,\vec{u})$ est l'ensemble des points images des nombres réels.
- L'axe $(O,\vec{v})$ est l'ensemble des points images des nombres imaginaires purs

b- Affixe d'un vecteur

***Définition* :** Dans le plan muni d'une base orthonormale directe, le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a , b) est appelé vecteur image du nombre complexe a + b*i*. Réciproquement, le nombre complexe a + b*i* est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.

***Propriété* :** Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Exemple : Soit $A\left(-\frac{1}{2}+i\right)$ et B(2 + 2i) ; $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $\frac{5}{2}+i$ et $\overrightarrow{BA}$ a pour affixe $-\frac{5}{2}-i$.

c- Affixe du milieu d'un segment

Soit A, B et M trois points d'affixes respectives z_A , z_B et z_M tels que M est le milieu de [AB].

M milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_M - z_A = \frac{1}{2}(z_B - z_A) \Leftrightarrow z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$

5) MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition : Soit z un nombre complexe quelconque et M le point image de z dans le plan (P) muni du repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. On appelle module de z la distance OM. On note $|z|$ = OM.

Remarques :

- Si z est réel, sa valeur absolue et son module sont confondus.
- $|z| \in \mathbb{R}^+$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

***Propriéte 1* :** Soit z un nombre complexe tel que z = a + bi. On a : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Exemple : $|1+i| = \sqrt{2}$; $|1+i\sqrt{3}| = 2$

***Propriété 2* :**

- Pour tout nombre complexe z, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- Pour tous nombres complexes z et z'
  (i) $|zz'| = |z|.|z'|$
  (ii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
  (iii) $|z| = |\bar{z}|$
  (iv) $|z^n| = |z|^n$

  Exemple : $\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right|^3 = 2^3 = 8$

6) EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$

T.P : Résolution dans C des équations du second degré

Partie A

1°) a) Résoudre dans C les équations suivantes : $z^2 = 5$; $z^2 = -9$

b) A étant un réel fixé, résoudre dans C l'équation $z^2 = A$

2°) On désire résoudre dans C l'équation : $z^2 = 3 + 4i$ (E). Pour cela, on pose z = x + iy, x et y étant des réels.

a) Calculer $|z|^2$. Vérifier que résoudre l'équation (E) revient à résoudre dans IR x IR le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

b) En déduire les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). Vérifier que $z_2 = -z_1$.

3°) En procédant comme dans la question 2°), résoudre dans C l'équation $z^2 = 8 + 6i$.

4°) **Enoncé admis :** A est un complexe donné, l'équation $z^2 = A$ admet deux solutions, distinctes ou confondues, opposées dans C. Ces solutions s'appellent les racines carrées du nombre complexe A.

Partie B

1°) Résoudre dans C, les équations suivantes : $z^2 + 5z + 3 = 0$; $z^2 + z + 2 = 0$. On pourra écrire les polynômes considérés sous forme canonique.

2°) On se propose de résoudre par deux méthodes l'équation dans C :

$z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$ (F).

- Première méthode : établir que l'équation (F) est équivalente à $(z-i)^2 = -1 + i\sqrt{3}$. Résoudre alors dans C l'équation $\omega^2 = -1 + i\sqrt{3}$. En déduire les solution z_1 et z_2 de l'équation (F).
- Seconde méthode : on pose a = 1, b = - 2i , $c = -i\sqrt{3}$. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$. Résoudre dans C l'équation $\delta^2 = \Delta$. Soit δ une solution de cette dernière équation. Vérifier que les nombres $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ sont solutions de l'équation (F).

3°) Résoudre dans C l'équation $2iz^2 - 3z - 1 - 3i = 0$.

4°) **Enoncé admis :** Toute équation du second degré dans C admet soit une solution,dite double, soit deux solutions.

Partie C

Résoudre dans C les équations suivantes :

1°) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

2°) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$ sachant qu'au moins l'une des solutions est un imaginaire pur.

II. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Activité

Soit M le point d'affixe z non nulle, de forme algébrique a + bi. Soit α une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et r le module de z.

Calculer a et b en fonction de r et α. En déduire une deuxième écriture de z.

Solution

$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha$ et $\sin\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\alpha$ donc z = a + bi = r(cosα + isinα)

Définition

Soit M le point du plan complexe d'affixe z non nulle tel que OM = r et mes$(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ = α.

L'écriture r(cos α + sin α) est **la forme trigonométrique** du nombre complexe z ; α est un argument de z et l'on note argz = α.

Remarques

- Pour tout entier relatif k, α + kπ est aussi un argument de z.
- 0 ne peut pas être écrit sous forme trigonométrique
- Pour noter le nombre complexe de module r et dont un argument est α, on écrit z = [r , α].

Propriétés

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) LIEN ENTRE FORME ALGEBRIQUE ET FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de forme algebrique x + iy et de forme trigonométrique [r , α].

$$x + iy = [r , \alpha] \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\alpha = \frac{x}{r} \\ \sin\alpha = \frac{y}{r} \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

Exemple : Soit $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Cherchons une forme trigonométrique de z.

On a r = 1 , $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Par suite $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \left[1; \frac{2\pi}{3}\right]$.

1) Soit z OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

a- Egalité

= [r , α] et z' = [r' , α'] deux nombres complexes non nuls. z = z' $\Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 2k\pi, \quad k \in IR \end{cases}$

b- Nombre complexe conjugué

Soit z = [r , α] un nombre complexe non nul et $\bar{z}$ son conjugué. Alors $\bar{z}$ = [z , - α].

Conséquence : Si z est un nombre complexe de module 1 et d'argument α, alors z = cosα + *i*sinα et $\bar{z}$ = cosα – *i*sinα. On en déduit les formules d'Euler suivantes :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right) \\ \sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(z - \bar{z}\right) \end{cases}$$

c- Opposé d'un nombre complexe non nul

Soit z = [r , α] . On a –z son opposé tel que – z = [r , α + π]

d- Multiplication

Soit z = [r , α] et z' = [r' , α']

zz' = r(cos α + *i*sin α) . r'(cos α' + *i*sin α')

= rr'[(cos α.cos α' - sin α.sin α') + *i*(sin α.cos α' + sin α'.cos α)]

= rr'[cos(α + α') + *i*sin(α + α') = [rr' ; α + α'].

Donc |zz'| = |z|.|z'| et arg(zz') = argz + argz' + 2kπ, k ϵ ℤ

Exemple d'application **:** Soit u = 1 – *i* et v = - 1 + $i\sqrt{3}$. Mettre sous forme trigonométrique u, v et u – v .

e- Puissance entière d'un nombre complexe non nul

Quels que soient le nombre complexe non nul z et le nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n.\arg z + 2k\pi$, k$\epsilon$ …

Corollaire : Formule de Moivre :

Pour tout réel α et pour tout entier naturel *n*, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

Exemple : Soit z = $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Calculons u = z^{1992}

$|u| = |z|^{1992} = 1$

Argu = 1992.argz + 2kπ = $\frac{1992}{3}\pi + 2k\pi$ = 664π + 2kπ = 2k'π donc u = 1.

f- Quotient de deux nombres complexes non nuls

Soit z = [r , α] et z' = [r' , α'] et Z = $\frac{z}{z'}$

Zz' = z donc $\begin{cases} |Z|.|z'| = |z| \\ \arg Z + \arg z' = \arg z + 2k\pi, k \in \end{cases}$ donc $|Z| = \frac{|z|}{|z'|}$ et argZ = argz – argz' + 2kπ

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\frac{z}{z'}$ = argz – argz' + 2kπ

Exercice d'application :

Soit z = $(1 + i)^4$ et z' = $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$. Ecrivons Z = $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

- $|1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc

  $z = \sqrt{2}^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

- $\left|\sqrt{3}-i\right| = 2 \Rightarrow \sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ donc

  $z' = 2^3\left(\cos 3\frac{-\pi}{6}+i\sin 3\frac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

On a alors , $|Z| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \arg Z = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ par suite $Z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}i$

g- Inverse d'un nombre complexe non nul

Quel que soit le nombre complexe non nul z, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi, k \in Z$.

2) Racine n^{ième} d'un nombre complexe non nul

a- Etude générale

Soit z un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul. On dit qu'un nombre complexe Z est une racine n-ième du nombre complexe z si et seulement si $Z^n = z$.

On pose z = $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $Z = r(\cos\omega + i\sin\omega)$. On connait ρ et θ et on cherche r et ω.

$Z^n = z$; $Z^n = [r^n , n\omega] = r^n(\cos(n\omega) + i\sin(n\omega)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ qui équivaut à $\begin{cases} r^n = \rho (\in IR_+^*) \\ n\omega = \theta + 2k\pi \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \omega = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}, k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Conclusion:

Soit $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; z admet toujours n racines n-ième qui s'écrivent :

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

b- Cas de l'unité

Déterminons Z tel que $Z^n = 1$

$1 = \cos0 + i\sin0$; $Z = r(\cos\omega + i\sin\omega)$; $Z^n = r^n(\cos n\omega + i\sin n\omega)$

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\omega = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 (r \in IR_+^*) \\ \omega = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \{0,1,2,...,n-1\} \end{cases} \text{ d'où } Z_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

III. FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1) NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Le nombre complexe de module 1 et d'argument α est noté $e^{i\alpha}$.

Exemple : $1 = e^{2\pi i}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-1 = e^{i\pi}$; $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

2) NOMBRES COMPLEXES NON NULS

Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$. L'écriture $re^{i\alpha}$ est la forme exponentielle du nombre complexe z.

Remarque : Si $z = re^{i\alpha}$ avec $r < 0$, on peut écrire $z = (-r)(-e^{i\alpha}) = -r(-\cos\alpha - i\sin\alpha) = -r[\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi)] = -re^{i(\alpha+\pi)}$

On a alors $|z| = -r$ et $\arg z = \alpha + \pi$

3) REGLES DE CALCULS

Les règles de calculs sur les nombres complexes écrits sous forme exponentielle sont les règles de calculs sur les puissances.

Quels que soient les nombres complexes non nuls $re^{i\alpha}$ et $re^{i\beta}$:

- $re^{i\alpha}.r'e^{i\beta} = rr'e^{i(\alpha+\beta)}$
- $\dfrac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\beta}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\alpha-\beta)}$
- $\dfrac{1}{re^{i\alpha}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\alpha}$
- $\overline{re^{i\alpha}} = re^{-i\alpha}$

4) FORMULE DE MOIVRE

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ donc $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$

Exemple : Ecrivons cos2α et sin2α en fonction de sinα et cosα

$$\left(e^{i\alpha}\right)^2 = e^{in\alpha} \Leftrightarrow (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\cos\alpha.\sin\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \end{cases}$$

5) FORMULE D'EULER

De $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$, on déduit : $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$ et $\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$

IV. TRAVAUX PRATIQUES

V. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

1) EXEMPLES DE CARACTERISATIONS DE CONFIGURATIONS SIMPLES DU PLAN

a- Cercle de centre A et de rayon R

Le cercle de centre A(z) et de rayon R > 0 est l'ensemble des points M(z) tels que : $|z - z_A| = R$.

b- Médiatrice d'un segment [AB]

La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points M du plan d'affixe z, tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$

c- Triangles

- ABC est un triangle isocèle en A équivaut à $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.
- ABC est un triangle équilatéral équivaut à $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$

d- Angles de vecteurs

….

Soit M(z) avec $z \neq 0$, $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg z + 2k\pi, k \in Z$.

Soient A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c.

Si $b \neq a$ et $c \neq a$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe b – a donc |b – a| = AB.

$\left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)$ = arg(b – a) + 2kπ = β + 2kπ. Donc $b - a = AB.e^{i\beta}$; de même $c - a = AC.e^{i\gamma}$ avec $\gamma = mes\left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right)$

.

Donc $\frac{c-a}{b-a} = \frac{ACe^{i\gamma}}{ABe^{i\beta}} = \frac{AC}{AB}e^{i(\gamma-\beta)}$. $\gamma - \beta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

γ – β et α sont donc des mesures de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ donc $e^{i(\gamma-\beta)} = e^{i\alpha}$ Finalement : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{AC}{AB}e^{i\alpha}$

Pour tous nombres complexes distincts a, b et c d'images respectives A, B et C et pour toute mesure α de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, on a $\frac{c-a}{b-a} = \frac{AC}{AB}e^{i\alpha}$ Autrement dit : $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg\frac{c-a}{b-a} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice d'application : A tout complexe $z \neq i$, d'image M, on associe $Z = \frac{z-2}{z-i}$.

i) Interpréter géométriquement |Z| et argZ à l'aide des images A de 2 et B de *i*.
ii) Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que |Z| = 1
iii) Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que Z est un nombre réel.
iv) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que Z est un imaginaire ***pur.***

Réponse :

i) Si z = 2, Z = 0 donc Z n'a pas d'argument

Si $z \neq 2$ et $z \neq i$, $|Z| = \left|\frac{2-z}{i-z}\right| = \frac{MA}{MB}$ et $\arg Z = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$

ii) |Z| = 1 équivaut à $\frac{MA}{MB} = 1$ qui équivaut à MA = MB donc E_1 est la médiatrice de [AB].

iii) Z est un réel signifie que Z = 0 ou argZ = 0 ou argZ = π c'est-à-dire M = A, $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = 0$ ou $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \pi$. Par suite E_2 est la droite (AB) privée du point B.

iv) Z est un imaginaire pur signifie que $Z \neq 0$ d'une part et d'autre part, $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = -\frac{\pi}{2}$ .E_3 est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

2) TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN

a- Transformations du plan et bijection de □

L'application du plan P dans □ qui à tout point de P fait correspondre son affixe est une bijection ; on dit que la transformation F : $\begin{matrix} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{matrix}$ a pour bijection complexe associé f : $\begin{matrix} C \to C \\ z \mapsto z' \end{matrix}$ et pour écriture complexe z' = f(z).

b- Transformations élémentaires du plan

- **Symétries**

- La symétrie d'axe (OI) a pour écriture complexe z' = $\bar{z}$
- La symétrie de centre O a pour écriture complexe z' = - z
- La symétrie d'axe (OJ) a pour écriture complexe z' = $-\bar{z}$
- La symétrie de centre Ω(z_0) a pour écriture complexe $z' - z_0 = -(z - z_0)$

- **Translation**

Soit a un nombre complexe donné de vecteur-image $\vec{u}$. A la fonction de C dans C qui à z associe z' = z + a correspond la fonction de P dans P qui au point M(z) associe le point M'(z').

On a : z' = z + a $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

L'application qui à M associe M' est donc la translation de vecteur $\vec{u}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a a pour écriture complexe z' = z + a.

Exercice d'application : Soit A, B et C trois points d'affixes respectives – 1, 2*i* et 2 ; soit A', B' et C' trois points d'affixes respectives 2 – *i*, 3 + *i*, 5 – *i*. Montrer que le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par une translation qu'on caractérisera.

Réponse : $z_{A'} = z_A + (3 - i)$; $z_{B'} = z_B + (3 - i)$; $z_{C'} = z_C + (3 - i)$; c'est donc la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 3 – *i*.

- **Rotation**

Soit M(z), Ω(ω) et M'(z').

M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle α signifie que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$$

Remarque : si Ω = O alors $z' = e^{i\alpha} z$

- **Homothétie**

Soit M(z), Ω(ω) et M'(z')

M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k signifie :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$.

LIMITES-CONTINUITE

I. LIMITES D'UNE FONCTION

1) NOTIONS DE BASE

a- Limites de référence

Les limites suivantes seront utilisées dans les calculs de limites de fonctions.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0 \quad (n \in IN^*)$

(ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in IN^*)$

(iii) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n } est\ pair \\ -\infty & \text{si n } est\ impair \end{cases} \quad (n \in IN^*)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \quad (n \in IN^*)$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n } est\ pair \\ -\infty & \text{si n } est\ impair \end{cases} \quad (n \in IN^*)$

(viii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in IN^*)$

(ix) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in IN^*)$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(xi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

(xii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Remarque : les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini.

b- Limites et opérations sur les fonctions

x_0 , l , l' sont des réels ou l'infini

(i) Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$l'\neq 0$	$l'\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f.g)(x)$	$l\,.\,l'$	$\begin{cases}+\infty \ si\ l'>0\\ -\infty \ si\ l'<0\end{cases}$	$\begin{cases}-\infty \ si\ l'>0\\ +\infty \ si\ l'<0\end{cases}$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

(iii) Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert$	L	$l\neq 0$	0	L	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}\lvert g(x)\rvert$	$l'\neq 0$	0	0	$+\infty$	l'	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0}\left\lvert\dfrac{f}{g}(x)\right\rvert$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$	F.I.	0	$+\infty$	F.I.

Une étude de signes permet ensuite de déterminer la limite de la fonction $\dfrac{f}{g}$

2) EXEMPLES DE CALCULS DE LIMITES

a- Utilisation d'une factorisation

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x-2}-\sqrt{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{5-\dfrac{2}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^3+x+8}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}=0$

b- Utilisation de l'expression conjuguée

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{\sqrt{9x^2+7}-3x}=0$

c- Utilisation de la dérivée

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ avec $f(x)=\sqrt{1+x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc $f'(0)=\dfrac{1}{2}$; on trouve alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ avec f(x) = sin x

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x-\frac{1}{4}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\pi\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) THEOREMES

a- Comparaison

Théorème 1 : f et u sont deux fonctions définies sur un intervalle de la forme]a, +∞[.

Si pour x assez grand, f(x) ≥ u(x), (respectivement f(x) ≤ u(x)) et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=-\infty$) alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$).

Exemple : Soit f la fonction définie sur]1, + ∞[par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Pour tout x > 0, $x^2-1<x^2$ donc f(x) ≥ x. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Thérème 2 : f et u sont deux fonctions définies sur un intervalle de la forme]a, +∞[. L est un nombre réel.

Si pour x assez grand, |f(x) – L | ≤ u(x) et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$

Exemple : Soit f la fonction définie sur]0, + ∞[par $f(x)=\dfrac{2x^2+6}{x^2+3x+3}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

Pour x > 0, $\left|f(x)-2\right|=\dfrac{-6x}{x^2+3x+3}$, $\left|f(x)-2\right|\le\dfrac{6x}{x^2}$ car $x^2+3x+3>x^2$ et par suite $\left|f(x)-2\right|\le\dfrac{6}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

Thérème 3 : f , u et v sont trois fonctions définies sur un intervalle de la forme]a, +∞[.

Si pour x assez grand, u(x) ≤ f(x) ≤ v(x) et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=L$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur]0, + ∞[par $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

∀ x > 0, - 1 ≤ sin x ≤ 1, donc $-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b- Compatibilité avec l'ordre

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle de la forme]a, +∞[.

Si pour x assez grand, f(x) ≤ g(x) et si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L'$ alors L ≤ L'.

c- Limite de la composée de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ (où a, b et c sont finis ou non) alors $\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)=c$.

d- Fonction croissante majorée

Si une fonction est croissante sur un intervalle [a , b[(b fini ou non) et si elle est majorée sur cet intervalle, alors elle admet une limite fini en b.

II. FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

1) DEFINITION

Si une fonction f définie sur un intervalle I, admet une limite en tout point de I, alors on dit que f est continue sur I.

Remarques :

- Lorsqu'une fonction f est telle que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ on dit que f est continue au point a.
- Si f est continue sur I, alors la courbe représentant f est un « trait continu .»

Exemples :

- Les fonctions constantes sont continues sur IR.
- Les fonctions affines sont continues sur IR.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur IR.
- La fonction tangente est continue sur $IR \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur [0, + ∞[.

2 heures

2) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Soit f et g, deux fonctions continues en x_0. Alors : f + g , fg , λf (λ ϵ IR) , (f/g) (avec $g(x_0) \neq 0$) sont continues en x_0.

3) PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

Exemple : Soit $f :]0;+\infty[\to IR, x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. f est continue sur]0 ; + ∞[et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$; soit g la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $\begin{cases} si \;\; x > 0, \;\; alors \;\; g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$

g est continue sur [0 ; + ∞[: on dit que g est le prolongement par continuité de f en O.

Définition : Si une fonction *f*, définie et continue sur un intervalle]a , b] admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction g définie sur [a , b] par : $\begin{cases} si \;\; x \neq 0, \;\; alors \;\; g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{cases}$ est dite prolongement par continuité de *f* en a.

4) CONTINUITE ET DERIVABILITE

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
Remarque : la réciproque est fausse.
Ex : la fonction f définie sur IR par f(x) = |x| est continue sur IR mais n'est pas dérivable en 0.

5) IMAGE D'UN INTERVALLE

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle. Plus précisément, a et b désignant des nombres réels ou + ∞ ou - ∞, f étant une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, on a :

Si I est égal à	Et si… f est croissante sur I alors f(I) est l'intervalle	f est décroissante sur I alors f(I) est l'intervalle
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ; b[	$\left[f(a); \lim_{x\to b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x\to b} f(x); f(a) \right]$
]a ; b]	$\left] \lim_{x\to a} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x\to a} f(x) \right[$
]a ; b[	$\left] \lim_{x\to a} f(x); \lim_{x\to b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x\to b} f(x); \lim_{x\to a} f(x) \right[$

Exemples :

- $f:[1;+\infty[\to IR, x\mapsto \frac{1}{x}$; f est continue et strictement décroissante sur [1 ; + ∞[, donc $f\left([1;+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); f(1)\right]=]0;1]$.
- $g:[-3;-1]\to IR, x\mapsto x^2$; g est continue et strictement décroissante sur [-3 ; -1] et g([-3 ;-1]) = [g(-1) ; g(-3)] = [1 ; 9].

Conséquence :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. f(I) est un intervalle J, ce qui signifie que :

- Si a ϵ I, alors f(a) ϵ J
- Si k ϵ J, alors k est l'image par f d'un élément de I, et d'un seul, du fait de la stricte monotonie. L'équation f(x) = k admet une solution unique dans I. On dit que f est une bijection de I dans J.

6) FONCTIONS RECIPROQUE DES FONCTIONS BIJECTIVES

Rappel : Si $f:E\to F$ est bijective ($\forall y\in F, \exists! x\in E, y=f(x)$) alors f admet une fonction réciproque $f^{-1}:F\to E$. y = f(x) signifie que x = f^{-1}(y).

Th : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une fonction bijective de I vers f(I). f admet donc une fonction réciproque f^{-1} de f(I) vers I qui est continue et a le même sens de variation que f. Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

7) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Th : Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a , b] (respectivement]a , b[ ) et f(a).f(b) < 0 (respectivement $\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to b} f(x)<0$) alors il existe au moins α ϵ [a , b] (respectivement α ϵ]a ,b[ ) tel que f(α) = 0. Si de plus f est strictement monotone alors α est unique.

CALCUL DIFFERENTIEL

I. NOMBRE DERIVE- FONCTION DERIVEE

1. NOMBRE DERIVE D'UNE FONCTION EN x_0

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un réel quelconque de I et A un réel.

Définition 1 :

On dit que *f* est dérivable en x_0 et admet A pour nombre dérivé en x_0 si la propriété suivante est réalisée : la fonction θ définie pour *h* non nul tel que $x_0 + h$ soit dans I par $\theta(x)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet A pour limite en zéro.

Exemple : $f:IR\setminus\{3\}\to IR, x\mapsto \frac{x^2-x+1}{x-3}$. *f* admet-elle un nombre dérivé en 2 ?

Soit $h \in$ IR tel que $h + 2 \neq 3$. $f(2+h) = \dfrac{h^2+3h+3}{h-1}$; $\theta(h) = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{h+6}{h-1}$. $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = -6$ donc f admet pour nombre dérivé en 2 le réel - 6.

Définition 2 :

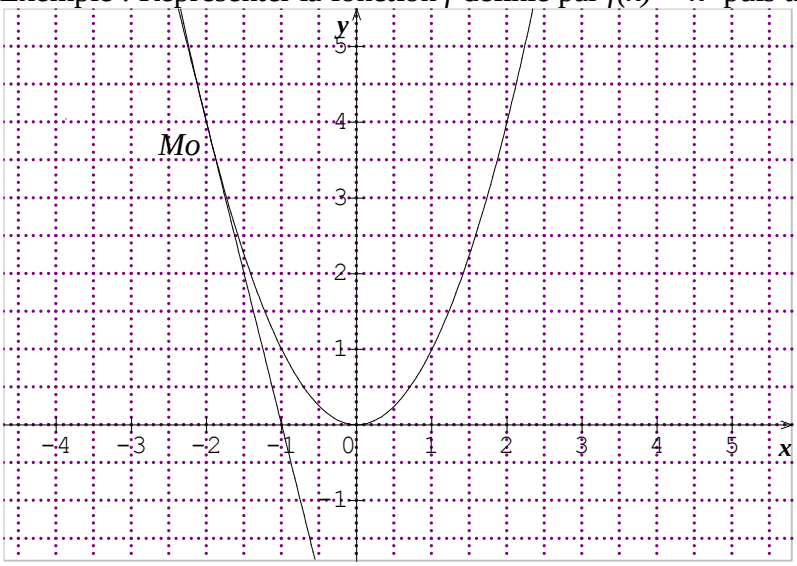
On dit que *f* est dérivable en x_0 et admet A pour nombre dérivé en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$

2. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I en lequel *f* admet $f'(x_0)$ pour nombre dérivé. Soit (C) la courbe représentative de *f* dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ On appelle tangente à la courbe (C) au point $M_0(x_0 , f(x_0))$ la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Une équation cartésienne de la tangente à (C) au point $M_0(x_0 , f(x_0))$ est :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple : Représenter la fonction *f* définie par $f(x) = x^2$ puis tracer la tangente en -2 à la courbe de *f*.



3. DERIVABILITE A DROITE – DERIVABILITE A GAUCHE

Soit x_0 un réel et *f* une fonction dont l'ensemble de définition D contient un intervalle de la forme $[x_0 , x_0 + r[$. On dit que *f* est dérivable à droite en x_0, de nombre dérivé à droite *m*, si et seulement si la restriction de *f* à $D \cap [x_0; +\infty[$ est dérivable en x_0 de nombre dérivé *m*. On a alors $m = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Soit x_0 un réel et *f* une fonction dont l'ensemble de définition D contient un intervalle de la forme $]x_0 - r , x_0]$. On dit que *f* est dérivable à gauche en x_0, de nombre dérivé à gauche *m*, si et seulement si la restriction de *f* à $D \cap]-\infty; x_0]$ est dérivable en x_0 de nombre dérivé *m*. On a alors $m = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

f est dérivable en x_0 de nombre dérivé *m* si et seulement si elle est dérivable à droite en x_0 de nombre dérivé à droite *m*, et dérivable à gauche en x_0 de même nombre dérivé à gauche *m*.

4. FONCTIONS DERIVEES

a) Fonctions dérivée première

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. Lorsque *f* est dérivable en tout point de I, on dit que *f* est dérivable sur I. La fonction numérique, définie sur I, qui à chaque valeur *x* de I associe le nombre dérivé de *f* en *x* est appelée fonction dérivée première de *f* sur I et noté $f\,'$ ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple :

Soit $f : IR \to IR, x \mapsto x^3 - x + 2$ Soit x_0 un réel quelconque. $\theta(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 - 1 + 3x_0 h + h^2$ et $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 3x_0^2 - 1$; donc *f* admet en tout réel x_0 un nombre dérivé égal à $3x_0^2 - 1$; *f* est donc dérivable sur IR et sa dérivée première *f '* est telle que : $f' : IR \to IR, x \mapsto 3x^2 - 1$

b) Fonctions dérivées successives

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.
Si la fonction dérivée première est elle-même dérivable en x_0, on dit que *f* est deux fois dérivable en x_0.
Si *f '* est dérivable sur I, on dit que *f* est deux fois dérivable sur I ; on appelle alors fonction dérivée seconde de *f*, ou dérivée d'ordre deux de *f* et on note *f''* ou encore $f^{(2)}$, la fonction dérivée de la fonction *f '* sur I.
Par itération, si *n* est un entier supérieur ou égal à 2, la fonction dérivée *n*-ième de *f*, ou dérivée d'ordre n de *f*, notée $f^{(n)}$ est, lorsqu'elle existe, la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$, $f^{(n-1)}$. $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$

Exemple : $f : IR \to IR, x \mapsto x^3 - x + 2$

$f' : x \mapsto 3x^2 - 1$

$f'' : x \mapsto 6x$

$f^{(3)} : x \mapsto 6$

Si $n \geq 4$ $f^{(n)} : x \mapsto 0$

II. PROPRIETES DE LA DERIVATION

1. RAPPELS

a) Dérivées des fonctions usuelles

Ensemble de dérivabilité	Fonction *f*	Fonction *f '*
IR	$x \mapsto a (a \in IR)$	$x \mapsto 0$
IR	$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
IR	$x \mapsto x^n (n \in IN^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$
I $\subset$ IR*	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
IR*$_+$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
IR	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$
IR	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Soit *f* et *g* deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors :

- la fonction *f* + *g* est dérivable sur I et sa fonction dérivée est *(f + g)' = f ' + g'*
- *fg* est dérivable sur I et *(fg)' = f 'g + fg'*

- si g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Exemple : $g(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

2. DERIVATION DES FONCTIONS COMPOSEES

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que f(I) soit inclus dans J.
Soit x_0 un élément de I.
Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et
$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0)$

Exemple : Soit $k : IR \to IR, x \mapsto (x^5 - 3x^2 + 1)^4$. Si f est la fonction définie sur IR par :
$f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ et g, la fonction définie sur IR par $g(t) = t^4$, alors k est la fonction composée $g \circ f$.
f et g étant dérivables sur IR, k est dérivable sur IR et pour tout réel x :
$k'(x) = g'[f(x)].f'(x) = 4(x^5 - 3x^2 + 1)^3(5x^4 - 6x)$.

Notation différentielle :
En Physique, si la variable est t et si l'on veut utiliser une variable intermédiaire y dépendant aussi de t, on écrira : $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dy}.\frac{dy}{dt}$

Exemple : Soit $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, l'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal, la variable ici étant le temps t. Posons $y(t) = \omega t + \varphi \Rightarrow i(t) = I_m \sin y\ (t)$ et $\frac{di}{dy}$ est la fonction $y \mapsto I_m \cos y$; Or $\frac{dy}{dt}(t) = \omega$ donc

$\frac{di}{dt}(t) = \frac{di}{dy}(y).\frac{dy}{dt}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi).\omega$

Corollaire : Si f est définie et dérivable sur l'intervalle I et si g est définie et dérivable sur l'intervalle f(I), alors $g \circ f$ est définie et dérivable sur I et sa fonction dérivée est $(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$.

3. APPLICATION AU CALCUL DE FONCTIONS DERIVEES

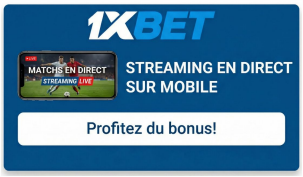
a) $k(x) = f(ax + b)$; $k'(x) = a\ f'(ax + b)$. Exemple : $k(x) = \sin(3x - 1)$, $k'(x) = 3\cos(3x - 1)$

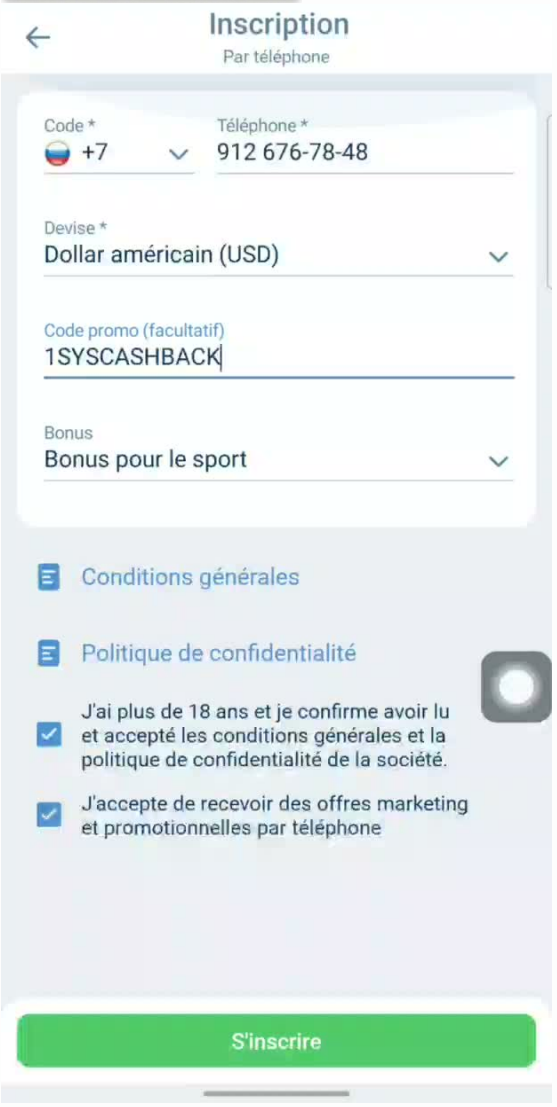
b) $(f^n)' = n f^{n-1} f'$.
Exemple : $k(x) = \cos^3 x$, $k'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x)$.

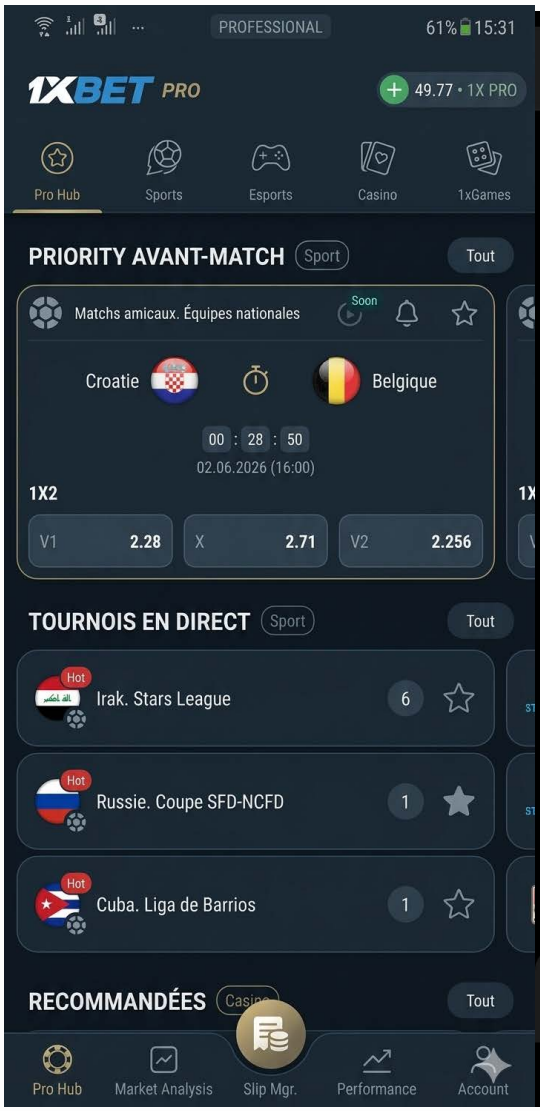
c) $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = -\frac{nf'}{f^{n+1}}$.

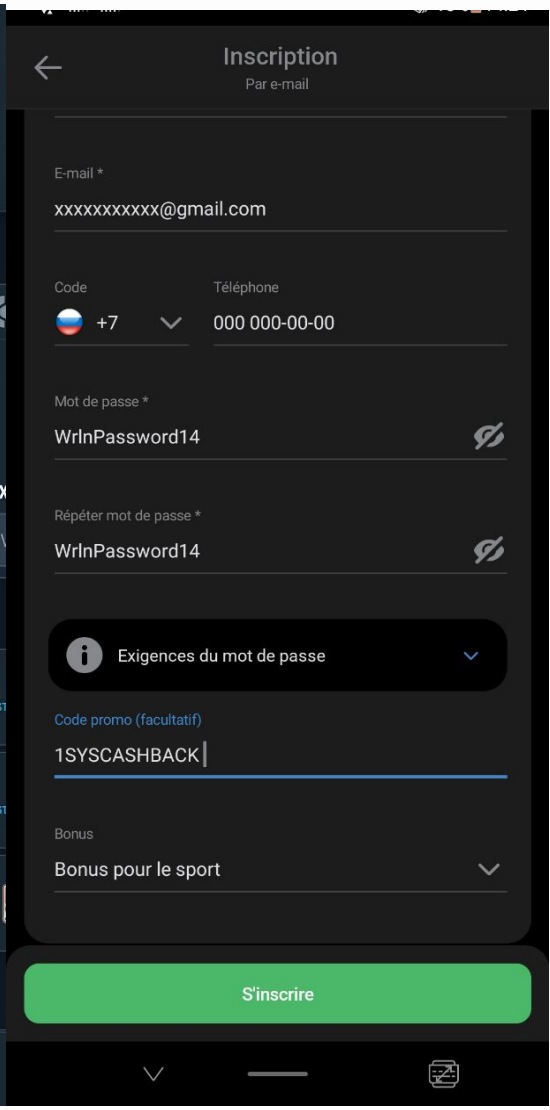
Exemple : $k(x) = \frac{1}{(4x^2 - 2x + 1)^3}$; $k'(x) = \frac{-3(8x - 2)}{(4x^2 - 2x + 1)^4}$

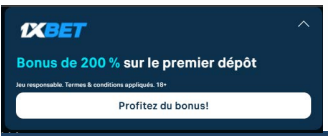
d) $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

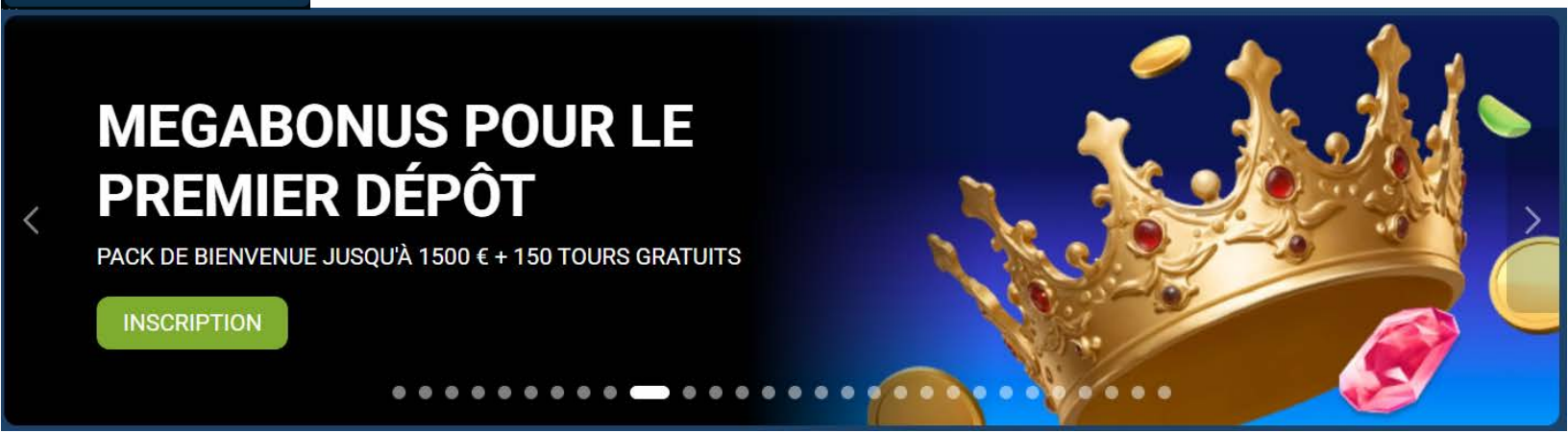

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Hot
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Hot
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

Exemple : $k(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ sur I = [1 ; + ∞[; $k'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

4. TABLEAU DES REGLES RELATIVES AU CALCUL DES DERIVEES

f et *g* désignent deux fonctions dérivables sur l'intervalle I de IR.

Fonctions	**Fonctions dérivées**
$f+g$	$f'+g'$
$\lambda f\ (\lambda \in IR)$	$\lambda f'$
$\frac{1}{f}$ et f ne s'annulant pas sur I	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$ et g ne s'annulant pas sur I	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$g\circ f$ et g dérivable sur f(I)	$(g'\circ f)f'$
$\sqrt{f}$ et f strictement positive sur I	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n ($n \in$ IN*)	$nf^{n-1}f'$
$\frac{1}{f^n}$ (n ∈ IN*) et f ne s'annulant pas sur I	$-\frac{nf'}{f^{n+1}}$
$f.g$	$f'g+fg'$

III. DERIVABILITE ET VARIATIONS DE FONCTIONS

1. DERIVABILITE ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I et *f '* sa fonction dérivée sur I.

- Si *f '* est nulle sur I, alors *f* est constante sur I.
- Si *f '* est positive sur I, alors *f* est croissante sur I
- Si *f '* est négative sur I, alors *f* est décroissante sur I

2. DERIVABILITE ET EXTREMA D'UNE FONCTION

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et *f '* sa fonction dérivée sur I.
Si *f* admet un extremum en un réel x_0 de I, alors $f'(x_0) = 0$. Réciproquement, si *f '* s'annule et change de signe en x_0, alors *f* présente un extremum en x_0.

IV. INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS

1. ACTIVITE

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle [a ;b] de fonction dérivée *f '* et telle qu'il existe deux réels m et M vérifiant, pour tout *x* de [a,b], $m \le f'(x) \le M$; soit *g* et *h* deux fonctions définies sur [a ;b] par $g(x) = Mx - f(x)$ et $h(x) = f(x) - mx$.

a) Démontrer que *g* et *h* sont dérivables sur [a ;b] et déterminer *g'* et *h'*.
b) Etudier les signes de $g'(x)$ et $h'(x)$ sur [a ;b] puis comparer $g(a)$ et $g(b)$ d'une part et $h(a)$ et $h(b)$ d'autre part.
c) En déduire que : $m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$

2. SOLUTION

a) $x \mapsto Mx$, $x \mapsto mx$ et *f* sont dérivables sur [a ;b] donc *g* et *h* sont dérivables sur [a ;b] comme somme de fonctions dérivables. $g'(x) = M - f'(x)$ et $h'(x) = f'(x) - m$.
b) $f'(x) \le M$ donc $g'(x) \ge 0\ \forall x \in [a;b]$; $f'(x) \ge m$ donc $h'(x) \ge 0\ \forall x \in [a;b]$. Donc *g* et *h* sont décroissantes sur [a ;b]. On a alors $g(a) \le g(b)$ et $h(a) \le h(b)$.

c) $g(a) \leq g(b)$ donc $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$ donc $f(b) - f(a) \leq Mb - Ma$
d'où $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ (1)
$h(a) \leq h(b)$ donc $f(a) - ma \leq f(b) - mb$ donc $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$ (2)
(1) et (2) montrent que $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

3. SYNTHESE

Théorème :
Soit a et b deux réels tels que a < b et *f* une fonction dérivable sur [a ;b].S'il existe deux réels m et M tels que, pour *x* de [a ;b], $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Corollaire :
Soit *f* une fonction dérivable sur [a ;b]. S'il existe un réel M tel que, pour tout réel *x* de [a ;b], $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Démonstration : $|f'(x)| \leq M \Rightarrow \forall x \in [a;b], -M \leq f'(x) \leq M \Rightarrow -M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Exercice d'application : Soit *x* et *y* deux réels quelconques et *f* la fonction sinus. Démontrer que $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

Solution : $f'(x) = \cos x$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $|\cos x| \leq 1$ donc $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

V. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

1. DEFINITION

Activité :
Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur IR par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \cos x$. Déterminer les fonctions F et G telles que F' = *f* et G' = *g*.

Définition
Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle I. On appelle fonction primitive ou primitive de *f* sur I, toute fonction F dérivable sur I et telle que F' = *f* sur I.

Exemple : Soit $f :]0, +\infty[\to IR, x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La fonction $F :]0, +\infty[\to IR, x \mapsto \sqrt{x} + 1$ est une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[

Remarque : toute fonction primitive est dérivable sur I, donc continue sur I.

Théorème 1 : Si *f* est une fonction continue sur un intervalle I, alors *f* admet des primitives sur I.

Théorème 2 : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. Si *f* admet une primitive F sur I, alors l'ensemble des primitives de *f* sur I est l'ensemble des fonctions de la forme F + k où k décrit IR. En particulier, si x_0 est un réel de I et y_0 un réel quelconque, il existe une unique primitive de *f* sur I prenant la valeur y_0 en x_0.

Démonstration : Soit *f* une fonction admettant une primitive F sur l'intervalle I. Soit G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ ($k \in IR$). G est dérivable sur I et G' = f donc G est une primitive de f sur I.
Réciproquement, si F et G sont deux primitives de *f* sur I, alors G – F est dérivable sur I et (G – F)' = G' – F' = *f* – *f* = 0 donc G – F est constante sur I et il existe un réel k tel que pour tout *x* de I, $G(x) = F(x) + k$.
Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in IR$ et si l'on impose à G de prendre la valeur y_0 en x_0, alors $G(x_0) = F(x_0) + k = y_0$ et $k = y_0 - F(x_0)$.

Exemple : Soit $f : IR \to IR, x \mapsto 2\sin x$. Les primitives de f sur IR sont les fonctions G définies par $G(x) = -2\cos x + k$ où k est un réel. En particulier, la primitive G_0 de f sur IR prenant la valeur $\dfrac{\pi}{4}$ en $\dfrac{\pi}{2}$ vérifie

$-2\cos\dfrac{\pi}{2} + k = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow k = \dfrac{\pi}{4}$ donc $G : IR \to IR, x \mapsto -2\cos x + \dfrac{\pi}{4}$

2. CALCULS DE PRIMITIVES

I est un intervalle tel que	Fonction f	Primitives F (k ϵ IR)
I ⊂ IR	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
I ⊂ IR	$x \mapsto 1$	$x \mapsto x+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto x^n (n \in IN^*)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
I ⊂ IR*	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}+k$
I ⊂ IR*	$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in IN^* et n \neq 1)$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
I ⊂ IR*+	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x+k$
I ⊂ IR	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x+k$
$I \subset IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $x \mapsto 1+\tan^2 x$	$x \mapsto \tan x+k$

I est un intervalle tel que	Fonction *h*	Primitives H
I ⊂ IR	af + bg (a et b des réels)	aF + bG + k
I ⊂ IR	$f^n f'$ (n ϵ IN)	$\frac{f^{n+1}}{n+1}+k$
I ⊂ IR et f ne s'annulant pas sur I	$\frac{f'}{f^n}$, n ϵ IN et n ≥ 2	$-\frac{1'}{(n-1)f^{n-1}}+k$
I ⊂ IR et f strictement positive sur I	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+k$
I ⊂ IR et ax + b ϵ I)	$\mapsto ag(ax+b)$	$x \mapsto G(ax+b)+k$
I ⊂ IR	$g \circ f . f'$	$G \circ f + k$

Exercice d'application : Trouver les primitives des fonctions définies par :

f(x) = 3 x⁴ – 2 x² + x – 1 ; g(x) = (2x + 1)(x² + x – 5)³ ; $h(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$ *sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; $j(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$; k(x) = (2x + 1)sin(x² + x + 1).

Solution

$F(x)=\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+k$

$G(x)=\frac{1}{4}(x^2+x-5)^4+k$

$H(x)=-\frac{1}{2(2x-1)}+k$

$J(x)=3\sqrt{x^2+1}+k$

$K(x)=-\cos(x^2+x+1)+k$

VI. ETUDE DE FONCTIONS NUMERIQUES

1. REDUCTION DU DOMAINE D'ETUDE

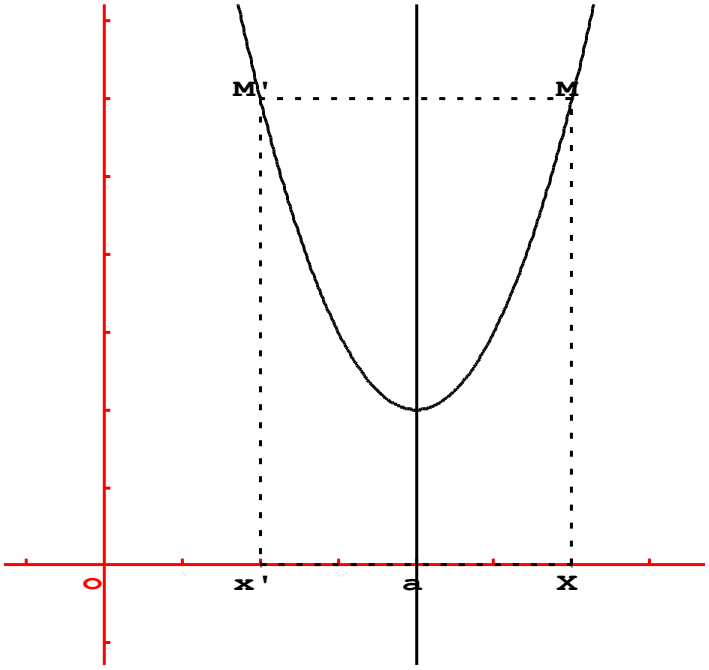
a) Parité d'une fonction

Soit f une fonction numérique.

- f est paire signifie $\begin{cases}\forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = f(x)\end{cases}$. L'axe (Oy) est alors un axe de symétrie de (C_f)
- f est impaire signifie $\begin{cases}\forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x)\end{cases}$. Le point O est alors centre de symétrie de (C_f).

Conclusion : on peut réduire le domaine d'étude à $[0;+\infty[\cap D_f$.

b) Symétrie par rapport à un axe x = a



Soit M(x,f(x)) et M'(x',f(x')) deux points de (C_f) avec m' le symétrique de M par rapport à l'axe d'équation x = a. Donc $\begin{cases}a = \dfrac{x+x'}{2} \quad (1) \\ f(x) = f(x') \quad (2)\end{cases}$. De (1), on tire x' = 2a – x et en remplaçant dans (2), on trouve f(x) = f(2a – x).

(C_f) admet la droite d'équation x = a comme axe de symétrie signifie : $\begin{cases}\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x)\end{cases}$

Conclusion : on peut réduire le domaine d'étude à $[a;+\infty[\cap D_f$.

c) Symétrie par rapport à la droite d'équation y = x

Soit M(x,f(x)) et M'(x',f(x')) deux points de (C_f) avec m' le symétrique de M par rapport à la première bissectrice qui a pour équation y = x. Donc $\begin{cases}x' = y \\ y' = x\end{cases}$.

Pour tout M(x,y) élément de (C_f), il faut que M'(y,x) soit aussi élément de (C_f).

d) Symétrie centrale par rapport au point A(a , b)

Soit M(x,f(x)) et M'(x',f(x')) deux points de (C_f) avec M' le symétrique de M par rapport au point A(a ;b).

On a alors A le milieu du segment [MM']. Donc $\begin{cases} a = \dfrac{x+x'}{2} & (1) \\ b = \dfrac{y+y'}{2} = \dfrac{f(x)+f(x')}{2} & (2) \end{cases}$. De (1), on tire x' = 2a – x

et en remplaçant dans (2), on trouve f(x) + f(2a – x) = 2b.

(C_f) admet le point A(a ;b) comme centre de symétrie signifie : $\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Conclusion : on peut réduire le domaine d'étude à $[a;+\infty[\cap D_f$.

e) Fonctions périodiques

i- Définition

Une fonction f est dite périodique si et seulement s'il existe un réel non nul k tel que pour tout x élément de D_f, f(x + k) = f(x).

On appelle période de la fonction f, le plus petit réel positif, noté T, tel que pour tout x élément de D_f, f(x + T) = f(x).

La courbe d'une fonction périodique de période T est globalement invariante par une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de largeur T. On travaille soit sur [O , T[soit sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ (surtout si f est paire ou impaire). En fin d'étude, on complète la courbe par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$

.

ii- Exemples de fonctions périodiques

- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π.
- Les fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ avec a ≠ 0 sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(ax+b)$ est périodique de période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

iii- Remarques

- Si f_1 et f_2 sont deux fonctions périodiques de périodes respectives T_1 et T_2, alors f = f_1 + f_2 est une fonction périodique de période le ppcm(T_1 ;T_2).

  Exemple : f_1 : x ⟼ sin 2x de période T_1 = π ; f_2 : x ⟼ cos 3x de période T_2 = $\dfrac{2\pi}{3}$

  f = f_1 + f_2 donc T = 2π .
- Quand une fonction se présente sous forme de produit, de puissance, de quotient des fonctions périodiques f_1, f_2 , f_3, … de periodes respectives T_1 , T_2, … le réel k = ppcm(T_1,T_2, …) est un multiple de la période T de f. (k = nT , n ϵ IN*).

  Exemple : $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x}$; $D_f = IR \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$

  $f_1(x) = \sin 3x$; $f_2(x) = \cos x$ donc $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x) f_2^2(x)}$ et $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, $T_2 = 2\pi$.

  $k = ppcm\left(\dfrac{2\pi}{3}, 2\pi\right) = 2\pi$. La période est donc π ou 2π .

$$f(x+\pi)=\frac{\sin(3x+3\pi}{\cos^3(x+\pi)}=\frac{\sin(3x+\pi+2\pi)}{-\cos^3 x}=\frac{-\sin 3x}{-\cos^3 x}=\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}=f(x)$$

2. POINTS PARTICULIERS DE LA COURBE REPRESENTATIVE D'UNE FONCTION

a) Point d'inflexion

Un point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ élément de (C_f) est un point d'inflexion si la tangente en M_0 à la courbe (C_f) coupe la courbe en M_0.

Dessin

Théorème : Si *f* est deux fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si $f''(x_0) = 0$ en changeant de signe alors *f* admet un point d'inflexion en x_0.

Exemple : $f : x \mapsto x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0$ pour $x > 0$; $f''(x) < 0$ pour $x < 0$; $f''(x) = 0$ pour $x = 0$; donc 0 est un point d'inflexion de *f*.

b) Point anguleux

Un point $M_0(x_0 , f(x_0))$ élément de (C_f) est un point anguleux si la dérivée de *f* à gauche de x_0 est différente de la dérivée à droite de x_0.

Exemple : $f : x \mapsto |x|$; $f'_d(O) \neq f'_g(0)$ donc O est un point anguleux.

3. ETUDE DES BRANCHES INFINIES

a) Asymptote oblique

La droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe (C_f) si et seulement si

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

b) Différents cas de branches infinies

1er cas : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$: asymptote horizontale d'équation $y = a$

2ème cas : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$: asymptote verticale d'équation $x = x_0$

3ème cas : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$: on calcule alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas, il n'y a pas de conclusion
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on a une branche parabolique de direction l'axe (0y).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on a une branche parabolique de direction l'axe (Ox).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in IR^*$), on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$.
  - si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$, on a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in IR$), on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$ n'existe pas, il n'y a pas de conclusion.

FONCTIONS USUELLES

I. FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

1) DEFINITION ET CONSEQUENCES

a) Définition

La fonction « inverse » $x \to \frac{1}{x}$ est une fonction définie et continue sur]O ; + ∞[. Elle admet donc des primitives et sur]O ; +∞[. Sa primitive qui prend la valeur 0 en 1 est la fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien, et on note ln, la primitive sur]O ; + ∞[de la fonction à x associe, $\frac{1}{x}$, qui s'annule en 1

b) Conséquence

- L'ensemble de définition de la fonction ln est]0 ; + ∞[.
- La fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout nombre réel x de]0 ; +∞[, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- ln 1 = 0.

c) Propriété

ln est dérivable sur]0 ; +∞[donc ln est continue sur]0 ; +∞[. On a $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall x \in]0 : +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur]0 ; + ∞[; ce qui permet de dire que la fonction ln est une bijection de]O ; + ∞[sur ln(]0 ; + ∞[)

- *Quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs*
- $ln\ a = ln\ b$ *si et seulement si* $a = b$
- $ln\ a > ln\ b$ *si et seulement si* $a > b$

Remarque

Puisque $ln1 = 0$, *la propriété précédente implique que* :

- $ln\ x < 0$ *si et seulement si* $0 < x < 1$
- $ln\ x > 0$ *si et seulement si* $x > 1$

2) PROPRIETES LIEES A LA DERIVATION

La fonction ln est dérivable sur]0 ; + ∞[et $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$(\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : $\forall x>0,\ f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

a) Dérivée de $\ln\circ u$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln\circ u$ est dérivable sur I et $(\ln\circ u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur]- ∞ ; - 3[par $f(x)=\ln\dfrac{x+3}{x-2}$. Calculons f'(x).

Posons $u(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ donc $u'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$; on a alors $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-2)^2}\times\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{-5}{(x-2)(x+3)}$

b) Recherche de primitives

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $f=\dfrac{u'}{u}$ sont les fonctions F_k définies sur I par $F_k(x)=(\ln\circ u)(x)+k$ où k est une constante réelle .

Remarque : Si f est de la forme $\frac{u'}{u}$ alors F est de la forme $ln|u|+k$

Exemples :

- $f:]-1,+\infty[\to IR, x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ a pour primitives $F_k:]-1,+\infty[\to IR, x\mapsto\ln(x+1)+k$
- $f:\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\to IR, x\mapsto\dfrac{\cos x}{\sin x}$ a pour primitives $F_k:\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\to IR, x\mapsto\ln(\sin x)+k$
- $f:IR^+\to IR, x\mapsto\dfrac{2x}{1+x^2}$ a pour primitives $F_k:IR^+\to IR, x\mapsto\ln(1+x^2)+k$

3) PROPRIETES ALGEBRIQUES

a) Activité

Soit n est un entier relatif, a un nombre réel strictement positif et f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)\ =\ ln(ax^n)$.

a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{n}{x}$

b) Donner les primitives F_k de f' sur IR^*_+

c) Trouver la valeur de k pour laquelle F_k = f

d) En déduire que : $\ln ab=\ln a+\ln b$; $\ln\dfrac{1}{b}=-\ln b$; $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$; $\ln b^n=n\ln b$; $\ln\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{n}\ln a$

Solution :

a) $f'(x) = \dfrac{(ax^n)'}{ax^n} = \dfrac{nax^{n-1}}{ax^n} = \dfrac{n}{x}$

b) $F_k(x) = n\ln x + k$

c) $\ln ax^n = n\ln x + k$; si x = 1 , k = ln a

d) Si n = 1 et x = b , alors ln ab = ln a + ln b

Si n = - 1, x = b et a = 1 alors $\ln\dfrac{1}{b} = -\ln b$

Si n = - 1 , x = b alors $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si a = 1 et x = b alors $\ln b^n = n\ln b$

$x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n = a \Leftrightarrow \ln x^n = \ln a \Leftrightarrow n\ln x = \ln a$ d'où $\ln x = \dfrac{1}{n}\ln a$ soit $\ln\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}\ln a$

b) Synthèse :

Pour tout couple (a , b) de nombres réels strictement positifs et pour tout nombre entier relatif n :

$\ln(ab^n) = \ln a + n\ln b$; $\ln ab = \ln a + \ln b$; $\ln\dfrac{1}{b} = -\ln b$; $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln b^n = n\ln b$;

$\ln\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}\ln a$

Exercice d'application : Résoudre dans IR l'équation ln(x + 3) + ln(x + 5) = ln 15

Solution : D_v =]- 3 ; +∞[et S = {0}

4) VARIATIONS DE LA FONCTION ln

- Pour tout x strictement positif, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif donc la fonction ln est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (admis)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

- Tableau de variation

X	0		1		+∞
(ln)'(x)	||	+	1	+	
ln x	||	0 ↗			+∞

	-∞

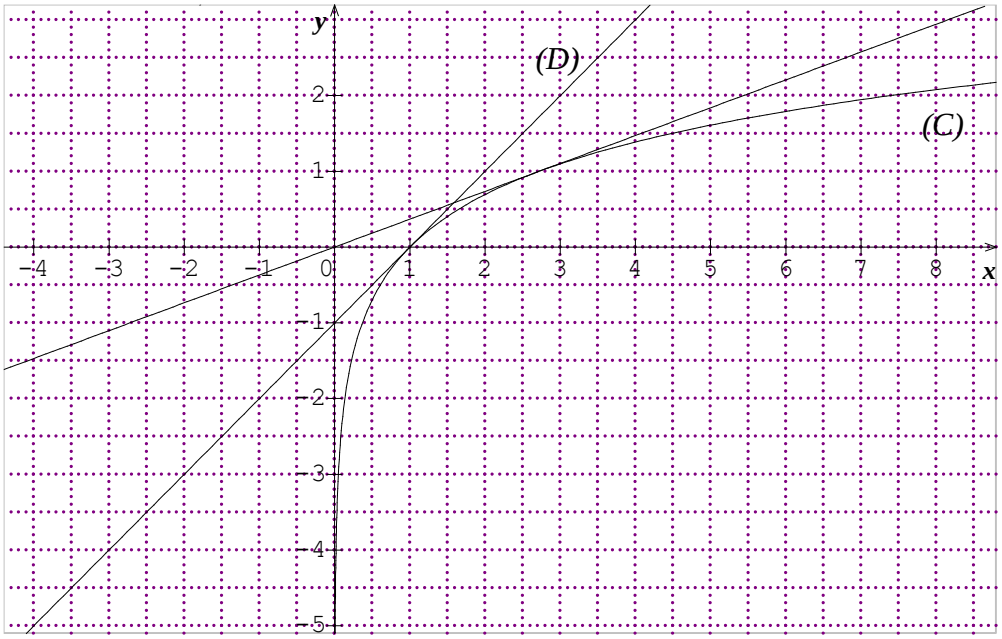
Le nombre e

La fonction ln est une bijection de]0 ; +∞[sur IR. Par conséquent, pour tout nombre réel γ, l'équation $lnx = \gamma$ admet une solution unique dans]0 ; +∞[. En particulier, en prenant $\gamma = 1$, l'équation $lnx = 1$ admet une solution unique.

On appelle base du logarithme népérien, le nombre unique noté e tel que $ln\ e = 1$. Ce réel e est appelé aussi nombre de Neper .on retiendra que $2 < e < 3$ et que $e \approx 2{,}7\ mais$ une calculatrice donne $e \approx 2{,}7182818284$

(Δ) : y = x – 1 est tangente à la courbe en A(1 ; 0)

(Δ') : $y = \frac{1}{e}x$ est tangente à la courbe en B(e ; 1)



5) ETUDES DE LIMITES

On admet les résultats suivants sur les limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$$

6) LA FONCTION LOGARITHME DECIMAL

On appelle logarithme décimal ou logarithme de base 10, et on note lg, ou log est la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Remarques :

- log 1 = 0 ; log 10 = 1

- $\forall x, y \in IR_+^*, \log(xy) = \log x + \log y$
- $\forall y \in IR_+^*, \log \frac{1}{y} = -\log y$
- $\forall x, IR_+^*, \forall n \in Z, \log x^n = n \log x$
- $\forall x \in Z, \log 10^n = n$

II. FONCTION EXPONENTIELLES

1) DEFINITION ET CONSEQUENCES

Définition :

La fonction ln étant une bijection de IR+* de IR , elle admet une bijection réciproque de IR vers IR+*. La fonction réciproque de la fonction ln est la fonction exponentielle de base e notée exp.

$\exp : IR \to IR_+^*, x \mapsto \exp(x)$

$\left(y = \exp(x) \forall x \in IR\right) \Leftrightarrow \left(x = \ln y \forall y \in IR_+^*\right)$

Notation : $\forall n \in Z, \ln e^n = n \ln e = n \Rightarrow \exp(\ln e^n) = \exp n \Rightarrow e^n = \exp n$. Par analogie, $\forall x \in IR, \exp x = e^n$.

Conséquences :

- La fonction exp est définie, continue et strictement croissante sur IR.
- Pour tout x élément de IR, $e^x > 0$
- exp est une application bijective :
  $\forall x_1, x_2 \in IR_+^* \quad x_1 = x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$ et $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$
- $\forall x \in IR, \ln e^x = x;$ et $\forall x \in IR_+^*, e^{\ln x} = x$
- $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = e^0$ et $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

2) PROPRIETES

$\forall a, b \in IR, e^{a+b} = e^a e^b$

Démonstration : On pose : $c = a + b, \quad \alpha = e^a, \ \beta = e^b, \ \gamma = e^c$

$\Rightarrow a = \ln \alpha, b = \ln \beta, c = \ln \gamma \Rightarrow c = \ln \gamma = \ln \alpha + \ln \beta \Leftrightarrow \gamma = \alpha\beta \Leftrightarrow e^c = e^a e^b$

Conséquences :

i) $\forall a \in IR, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

Démonstration : , $e^{a-a} = e^0 = e^a e^{-a} \Rightarrow 1 = e^a e^{-a} \Rightarrow e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

ii) $\forall a \in IR, \forall r \in Q, \left(e^a\right)^r = e^{ar}$

Exercice d'application : Résoudre dans IR l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Solution : on pose X = e^x et on trouve S = {0 ; ln 2 }

3) FONCTIONS DERIVEES ET PRIMITIVES

a- Fonctions dérivées

- $\forall x \in IR, \left(e^x\right)' = e^x$
- Soit une fonction u , $\forall x \in D_u, \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

Exemple : $\left(e^{x^2-\sin x}\right)' = (2x - \cos x)e^{x^2-\sin x}$

b- Fonctions primitives

- Les fonctions primitives de la fonction exp sont : F(x) = e^x + c (c ∈ IR)
- Les fonctions primitives des fonctions f(x)= u'(x)$e^{u(x)}$ sont F(x) = $e^{u(x)}$ + c

4) ETUDE DES LIMITES

i- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

ii- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration : $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{\ln y} = +\infty$

iii- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

Démonstration : on pose : $y = -x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(-ye^{-y}\right) = -\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0^-$

iv- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration : $f(x) = e^x$; $f'(0) = e^0 = 1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

5) ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est définie , continue et dérivable sur IR et $\left(e^x\right)' = e^x$

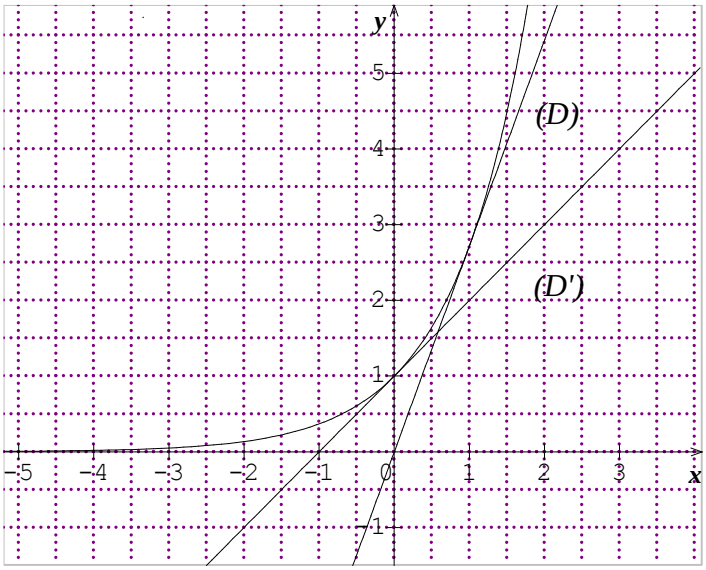
X	-∞		0		1		+∞
(e^x)'		+	1	+	e	+	
							+∞

e^x	e
	1
	0^+

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction (Oy).

(D) : y = e.*x* et (D') :y = x + 1 sont les tangentes respectivement en A(1 , e) et B(0 , 1).



III. FONCTIONS PUISSANCES

1) PUISSANCE REELLE D'UN NOMBRE REEL STRICTEMENT POSITIF

Définition : Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel, ln a^n = n ln a donc $e^{\ln a^n} = e^{n\ln a}$ soit $a^n = e^{n\ln a}$. On pose alors pour a > 0 et b ϵ IR, $a^b = e^{b\ln a}$. On parle ainsi de la puissance réelle d'un nombre strictement positif.

Conséquence : Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b, $\ln a^b = b\ln a$

Propriété : Pour tous nombre réels strictement positifs a et a' et tous nombres réels b et b' :

i. $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$

ii. $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$

iii. $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$

iv. $a^b a'^b = (aa')^b$

v. $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$

2) RACINE N-IEME D'UN NOMBRE POSITIF

a. Définition

La fonction $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[, x \mapsto x^n (n \in IN^*)$ est dérivable, donc continue et strictement croissante, elle est une bijection de [0 ; + ∞[sur [0 ; + ∞[. Elle admet donc une bijection réciproque de [0 ; + ∞[sur [0 ; +∞[.

On appelle racine n-ième (n ϵ IN*) la fonction réciproque de la fonction définie sur [0 ; + ∞[par x^n. On note $\sqrt[n]{x}$.

b. Conséquences

Soit x > 0 et n ϵ IN*, on a $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n \Leftrightarrow \ln x = n \ln y \Leftrightarrow \ln y = \frac{\ln x}{n} \Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{n}\ln x} \Leftrightarrow y = x^{\frac{1}{n}}$. Soit n un nombre entier strictement positif. La fonction racine n-ième est définie sur [0 ; + ∞[et, pour tout nombre réel x > 0, on a $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3) FONCTIONS PUISSANCES

On appelle fonction puissance toute fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ où

α est un nombre réel.

$$f'_\alpha(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = (\alpha \ln x)' e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

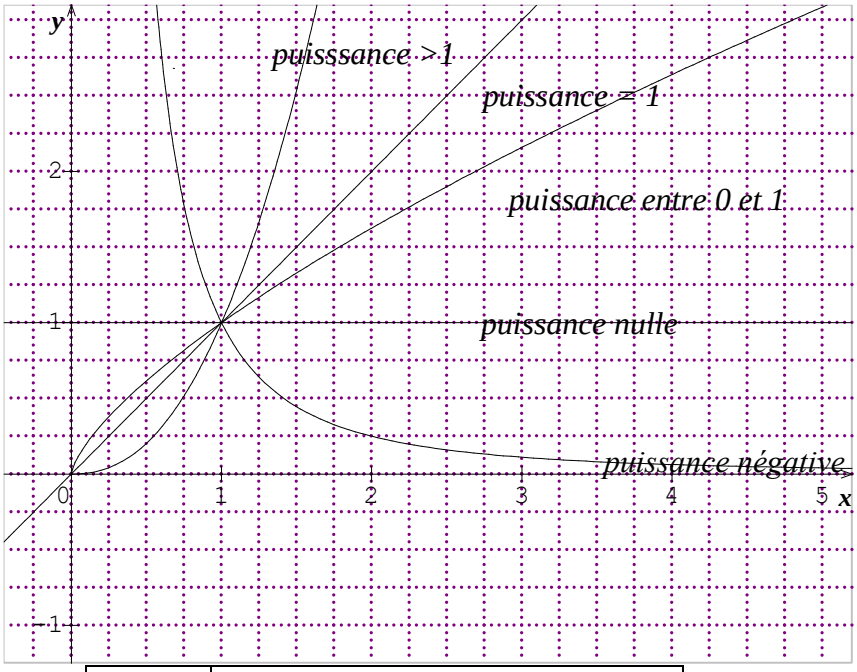
Si α > 0 $f'_\alpha(x) > 0$ et si α < 0 , $f'_\alpha(x) < 0$

Pour α > 0 on a le tableau de variation suivant :

x	0	+∞
$f'_\alpha(x)$	+	
$f_\alpha(x)$	0	+∞

Pour α < 0 on a le tableau de variation suivant :

x	0	+∞
$f'_\alpha(x)$	‖	-



$f_\alpha(x)$	+∞ ↘ 0

IV. CROISSANCES COMPAREES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Proposition 1 : Soit α un nombre réel strictement positif ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = O$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

Proposition 2 : Soit α un nombre réel quelconque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}$

SUITES NUMERIQUES

I. ACTIVITE

Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre premiers termes de la suite donnée:

1) La suite U définie par: $\forall\, n \in \square$, $U_n = 2n^2 + n - 1$
2) La suite V définie par: $\forall\, n \geq 3$, $V_n = \ln(2n-4)$
3) La suite W définie par: $\begin{cases} W_0 = 2 \\ \forall\, n \in \square \ , \ W_{n+1} = 2W_n - 3 \end{cases}$

II. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Le raisonnement par récurrence permet de justifier qu'une proposition P(n) dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné. Il se résume en deux étapes :

- Initialisation : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : établir que pour tout entier k donné, $k \geq n_0$, si P(k) est vraie alors P(k + 1) est vraie.

Une fois que les deux étapes précédentes sont établies, on conclut que P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

EXERCICE D'APPLICATION : On considère la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \geq 0 \ , \ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$;

démontrer ,par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $U_n = 3 - 2^n$.

III. SENS DE VARIATIONS D'UNE SUITE NUMERIQUE

1) DEFINITION

Soit (U_n) une suite définie sur une partie E de IN

- (U_n) est croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n de E.
- (U_n) est décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout n de E.
- (U_n) est constante si $U_{n+1} = U_n$ pour tout n de E.

2) METHODES PRATIQUES

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (U_n), on pourra :

- Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$
- Si la suite est à termes strictement positifs, comparer le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.
- Etudier le sens de variation de la fonction f si (U_n) est définie par $U_n = f(n)$
- Faire un raisonnement par récurrence.

IV. SUITES MAJOREES-SUITES MINOREES

Définition

Soit (U_n) une suite définie sur une partie E de IN.

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $U_n \leq M$ pour tout n de E.

- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $U_n \geq m$ pour tout n de E.
- (U_n) est bornée si (U_n) est majorée et minorée.

Remarque

Soit f une fonction de IR vers IR et U une suite définie par $U_n = f(n)$. Si f est majorée (resp minorée) sur un intervalle contenant l'ensemble de définition de la suite U alors U est majorée (resp minorée).

EXERCICE D'APPLICATION

Soit la suite V définie sur IN* par $V_n = \dfrac{3n^2+n}{n^2+1}$. Démontrer que V est minorée par 2.

V. LIMITE D'UNE SUITE NUMERIQUE

1) NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE

- Pour certaines suites numériques (U_n) tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel ℓ. Dans ce cas on dit que la suite (U_n) a pour limite ℓ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.
- Pour certaines suites numériques (U_n) tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi grands que l'on veut. Dans ce cas on dit que la suite (U_n) a pour limite $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- On dit que la suite (U_n) a pour limite $-\infty$ lorsque la suite $(-U_n)$ a pour limite $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

2) DEFINITION

Une suite numérique (U_n) est convergente si elle admet une limite finie.
Une suite non convergente est dite divergente.

3) PROPRIETES

- ✓ Si une suite numérique admet une limite alors cette limite est unique.
- ✓ Soit (U_n) la suite numérique de terme général $U_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \ell$ (réel ou infini) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

EXERCICE D'APPLICATION

Etudier la convergence de chacune des suites (U_n), (V_n), (T_n).

a) $\forall n \in IN^*, U_n = 3n^2 - \dfrac{1}{n}$

b) $\forall n \in IN^* \setminus \{1\}, V_n = \dfrac{3n^2-n}{1-n^2}$

c) $\forall n \in IN, T_n = 3(-1)^n$

4) CONVERGENCE D'UNE SUITE NUMERIQUE

- ✓ Une suite croissante et majorée est convergente
- ✓ Une suite décroissante et minorée est convergente.

VI. SUITES ARITHMETIQUES- SUITES GEOMETRIQUES

1) RAPPELS

	Suite arithmétiques de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Relation entre U_n et U_p ($p \leq n$)	$U_n = U_p + (n - p)\, r$	$U_n = U_p.q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs $S = U_p+U_{p+1}+\ldots+U_N$ ($p \leq N$) $N - p + 1$ termes	$S = \frac{(N-p+1)(U_p+U_N)}{2}$	$S = \frac{1-q^{N-p+1}}{1-q}U_p$, si $q \neq 1$ $S = (N - p + 1)U_p$ si $q = 1$

2) CONVERGENCE DES SUITES ARITHMETIQUES ET DES SUITES GEOMETRIQUES

Propriété 1

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. U_n est de la forme $U_n = k \times q^n$

- Si q = 1, alors la suite (U_n) converge vers son premier terme.
- Si $q \in]-1 ; 1[$, alors la suite (U_n) converge vers 0.
- Dans tous les autres cas, la suite (U_n) est divergente

Propriété 2

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. U_n est de la forme $U_n = b + r\, n$.

- Si r = 0, alors la suite (U_n) est convergente
- Si $r \neq 0$, alors la suite (U_n) est divergente

CALCUL INTEGRAL

I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Activité :

On considère la fonction *f* continue et définie sur IR par *f(x)* = 2*x*

a) Déterminer deux primitives F et G sur IR de la fonction *f*.
b) Calculer F(2) – F(1) et G(2) – G(1).

1. DEFINITION

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I contenant deux nombres réels *a* et *b*, F une primitive quelconque de *f* sur I.

Le nombre réel F(*b*) – F(*a*) est appelé intégrale de *a* à *b* de *f*. On note $\int_a^b f(t)dt$.

Remarques :

- $\int_a^b f(t)dt$ se lit aussi « intégrale ou somme de *a* à *b* de *f(t)* d*t* »
- *a* et *b* sont appelés les bornes de l'intégrale.
- Le réel F(*b*) – F(*a*) se note aussi $\left[F(t)\right]_a^b$ et se lit F(*t*) pris entre *a* et *b*.
- Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, *t* n'intervient pas dans les résultats : on dit que *t* est une variable muette, ainsi $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$ …

Exercice d'application : Soit la fonction *f* définie sur IR par *f(x)* = $3x^2$ + 3. Calculer l'intégrale de 0 à 1 de *f*.

Solution : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+3)dx = \left[x^3+3x\right]_0^1 = (1^3+3\times1)-(O^3+3\times0) = 4$.

2. INTERPRETATION GRAPHIQUE DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE POSITIVE

Propriété :

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthogonal du plan. Soit *a* et *b* deux nombres réels tels que *a* ≤ *b* et *f* un fonction continue sur [*a* ;*b*], (C) la courbe représentative de *f*, Δ la partie du plan limité par (C), l'axe des abscisses , les droites d'équation *x = a* et *x = b*.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ avec I(1 ;0) , K(1 ;1) et J(0 ;1).

Si *f* ≥ 0 sur [*a* , *b*] alors l'aire de Δ en unité d'aire (U.A) est $\int_a^b f(x)dx$

Si *f* ≤ 0 sur [*a* , *b*] alors l'aire de Δ en unité d'aire (U.A) est $\int_a^b [-f(x)]dx$.

Dessin

Remarque :

- Si *f* est continue et positive sur [*a*,*b*], la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation *x = a* et *x = b* est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (*x* ; *y*) vérifient : *a* ≤ *x* ≤ *b* et 0 ≤ *y* ≤ *f(x)*.
- Si *f* est continue et négative sur [*a*,*b*], la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation *x = a* et *x = b* est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (*x* ; *y*) vérifient : *a* ≤ *x* ≤ *b* et *f(x)* ≤ *y* ≤ 0.

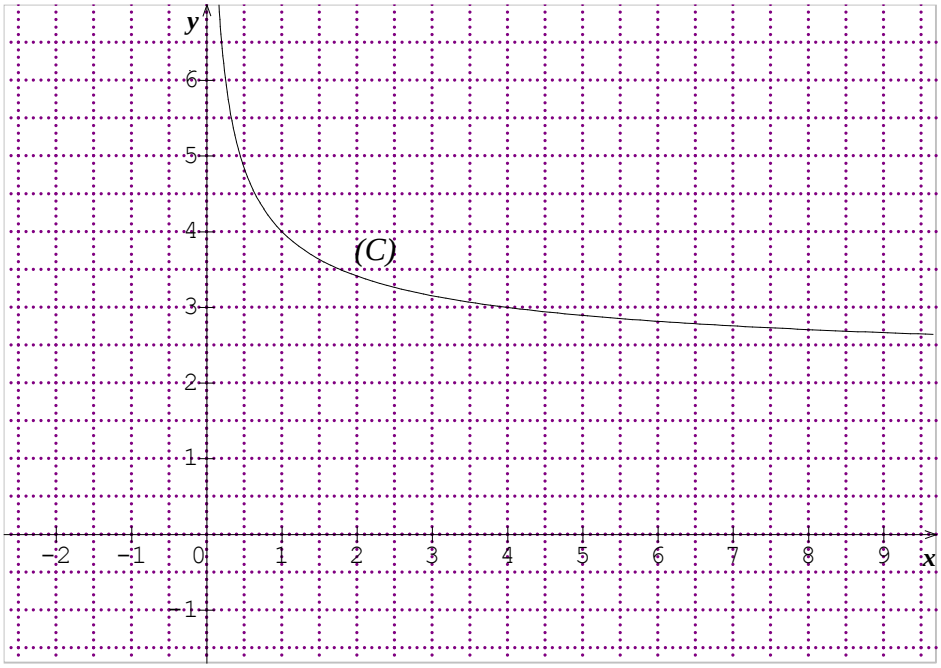
Exercice d'application :

On considère le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. Soit la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2$ et (C) sa courbe représentative donnée ci-dessous.

On considère Δ la partie du plan limitée par la représentation graphique (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation *x* = 1 et *x* = 4.

a) Hachurer Δ.

b) Calculer l'aire A de Δ en U.A et en cm^2.



Solution :

a) Voir figure

b) *f* est une fonction continue et positive sur [1 ; 4] alors l'aire en unité d'aire de Δ est

A = $\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+2\right)dx = \left[4\sqrt{x}+2x\right]_1^4 = 10U.A = 20cm^2$.

3. LIEN ENTRE PRIMITIVE ET INTEGRALE

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I de IR. Soit *a* un élément de I et la fonction F définie sur I par F(x) = $\int_a^x f(t)dt$.

Si G est une primitive quelconque de f sur I, F(*x*) = G(*x*) – G(*a*) donc F'(*x*) = G'(*x*) = f(*x*) ; de plus F(*a*) = $\int_a^a f(t)dt$ = 0 ; on en déduit que F est l'unique primitive de *f* définie sur I et s'annulant pour *x* = *a*.

Propriété : Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et soit *a* un élément de I. L'unique primitive de *f* sur I, s'annulant en *a* est la fonction F, qui à tout nombre réel *x* de I associe

F(*x*) = $\int_a^x f(t)dt$.

Exemples :

i) Pour tout réel *x* , sin *x* = $\int_0^x \cos t dt$

ii) Pour tout réel strictement positif *x*, ln *x* = $\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

II. PROPRIETES DE L'INTEGRALE

1) RELATION DE CHASLES

Soit *f* une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une de ses primitives ; *a* , *b* et *c* sont trois éléments de I. On a alors : $\int_a^c f(t)dt$ = [F(*c*) – F(*b*)] + [F(*b*) – F(*a*)] soit $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$. Cette relation est appelée relation de Chasles.

Conséquence : *a* et *b* étant deux nombres réels de I, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt$, or $\int_a^a f(t)dt = 0$; d'où pour tous *a* et *b* éléments de I, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

2) LINEARITE DE L'INTEGRATION

Soit deux nombres réels quelconques λ et μ et deux fonctions *f* et *g* continues sur un intervalle I contenant *a* et *b*. On a : $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_b^a g(t)dt$.

Exemple : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\sin t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 3\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}$

3) POSITIVITE

f est une fonction continue et positive sur [*a* , *b*]. Soit F une primitive de *f*, donc F' = *f*. Si *f* est positive sur [*a* , *b*] , F est croissante sur [*a* , *b*] ; et comme *a* ≤ *b*, on a F(*a*) ≤ F(*b*) ; donc F(*b*) – F(*a*) ≥ 0 c'est-à-dire $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Propriété : Si *f* est une fonction continue et positive sur [*a* , *b*] alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Remarque : $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ n'entraine pas nécessairement que sur [*a* , *b*] *f* soit positive.

Exemple : $\int_{-1}^{2} 2tdt = [t^2]_{-1}^{2} = 3$ or *f(x)* = 2*x* change de signe sur [-1 ; 2].

4) INTEGRALES ET INEGALITES

Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur [*a* , *b*] et telles que

$\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow g - f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g-f)((t)dt \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \geq 0$ d'où $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Propriété : *f* et *g* sont deux fonctions continues sur [*a* , *b*]. Si pour tout *x* élément de [*a* , *b*], *f(x) ≤ g(x)*, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Remarque :

Si *f* est une fonction continue sur [*a* , *b*], |*f*| est aussi continue et pour tout *x* élément de [*a* , *b*], on a :

-|f(*x*)| ≤ f(*x*) ≤ |f(*x*)| $\Rightarrow -\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$ soit $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

5) INEGALITE DE LA MOYENNE

Soit *f* une fonction continue sur [*a* , *b*] ; *f* est alors bornée sur [*a* ,*b*] donc il existe un couple de réels (m , M) tel que pour tout *x* élément de [*a* , *b*], m ≤ *f*(*x*) ≤ M $\Rightarrow -\int_a^b m dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b M dt$ donc

$m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$.

Propriété :

Si *f* est une fonction continue sur [*a* , *b*] et si m et M sont deux réels tels que pour tout *x* de [*a* , *b*] on ait m ≤ f(*x*) ≤ M. On a alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$.

Exemple : Soit *n* ∈ IN* et la fonction définie sur [*n* ; *n* + 1] par *f(x)* = $\frac{1}{x}$.

$\forall x \in [n, n+1], \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1}(n+1-n) \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{n}(n+1-n) \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le [\ln x]_n^{n+1} \le \frac{1}{n}$ d'où

$\frac{1}{n+1} \le \ln\frac{n+1}{n} \le \frac{1}{n}$.

Cas particuliers :

Si pour tout *x* élément de [*a* , *b*], on a |*f*(*x*)| ≤ M alors $-M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ soit

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$.

6) VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

Si b > a, $m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le M$.

Le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelé valeur moyenne de *f* sur l'intervalle [*a* , *b*].

7) INTEGRALE D'UNE FONCTION PAIRE, IMPAIRE, PERIODIQUE

Propriété 1 :

Soit *f* une fonction continue sur l'intervalle [- *a* , *a*].

- Si *f* est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si *f* est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Exemple : $\int_{-2}^{2} |x|dx = 2\int_0^2 |x|dx = 2\int_0^2 x dx = 4$

Propriété 2 :

Soit *f* une fonction continue et périodique sur IR, de période T. Alors quel que soit le nombre réel *a*

$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$.

Exemple : $I_1 = \int_{\frac{-8\pi}{3}}^{\frac{-2\pi}{3}} (1+\cos t)dt = \left[t+\sin t\right]_{\frac{-8\pi}{3}}^{\frac{-2\pi}{3}} = \left[\frac{-2\pi}{3}+\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right] - \left[\frac{-8\pi}{3}+\sin\left(\frac{-8\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{-2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi$

$I_2 = \int_0^{2\pi} (1+\cos t)dt = \left[t + \sin t\right]_0^{2\pi} = 2\pi$: on a bien $I_1 = I_2$.

III. INTEGRATION PAR PARTIES

u et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, de dérivées *u'* et *v'*. *(uv)' = u'v + v'u*
Si *u'* et *v'* sont continues sur I, *u'v* et (*uv*)' – *uv*' sont également continues sur I, donc intégrables sur I. Soit *a* et *b* deux éléments de I.

(*uv*)' = *u'v* + *v'u* $\Rightarrow \int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'v)(t)dt + \int_a^b (v'u)(t)dt$ d'où $\int_a^b (u'v)(t)dt = \left[(uv)(t)\right]_a^b - \int_a^b (v'u)(t)dt$.

Propriété :
Si deux fonctions *u* et *v* sont dérivables, de dérivées *u'* et *v'* continues sur un intervalle I alors, pour tout couple (*a* , *b*) de nombres réels de I, $\int_a^b (u'v)(t)dt = \left[(uv)(t)\right]_a^b - \int_a^b (v'u)(t)dt$.

Exemple : Soit I = $\int_0^{\pi} x\cos x dx$. Posons *u'(x)* = cos *x* et *v(x)* = *x* ; on a alors *u(x)* = sin *x* et *v'(x)* = 1

I = $\left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[x\sin x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_0^{\pi} = -2$.

IV. CALCULS D'AIRE ET DE VOLUME

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Propriété 1 : Soit *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle I = [*a* , *b*] telles que *f* < *g*. L'aire, en unité d'aire, du domaine limité par les droites d'équations *x = a* , *x = b* et les courbes de *f* et de *g* est : A = $\int_a^b (g-f)(x)dx$.

Propriété 2 : Soit *f* une fonction continue sur [*a* , *b*] et (C) sa courbe représentative. Par rotation de (C) autour de l'axe (Ox), (C) détermine un solide dont le volume, en unité de volume est V = $\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ACTIVITE

Soit la fonction f dérivable sur IR et définie par : $f(x) = e^{-x}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) + 2f(x) = 0$.
2. On considère la fonction g dérivable sur IR et définie par : $g(x) = 3e^{-2x}$. Vérifier que pour tout réel x, $g'(x) + 2g(x) = 0$.

On dit que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y' + 2y + 0$.

I. DEFINITION

On appelle équation différentielle, une équation où l'inconnue est une fonction f de IR vers IR et dans laquelle apparaît au moins une des dérivées successives de f.

Exemples : $y' + 2y = x^2$ est une équation différentielle du premier ordre et $y'' - 4y' + 7y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

Remarque : résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : y' – ay = 0 (a Є IR).

- La fonction nulle est solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On a : $y \neq 0$, $y' - ay = 0 \Leftrightarrow y' = ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a \Leftrightarrow \ln|y| = ax + c$; $c \in IR \Leftrightarrow |y| = e^{ax+c}$; $c \in IR$

$\Leftrightarrow y = e^{ax+c}$ ou $y = -e^{c}e^{ax} \Leftrightarrow y = Ke^{ax}$ avec $K \in IR^*$.

Propriété

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$ avec $K \in IR$.
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 sont des réels donnés).

Exercice d'application

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y' - 2y = 0$
   b) $y' + 3y = 0$
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée :
   a) (E) : $y' - 4y = 0$ et $f(0) = 3$

b) (E) : y' + $\sqrt{2}$ y = 0 ; la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $y'' + \omega^2 y = 0$

Activité : Vérifier que v(x) = Acos(ωx) + Bsin(ωx) (A et B deux réels) est solution de l'équation différentielle y'' + ω^2y = 0 .

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle y'' + ω^2y = 0 ($\omega \in$ IR*) sont les fonctions définies sur IR par : y(x) = Acos(ωx) + Bsin(ωx) (A et B deux réels)

COURBES PLANES PARAMETREE

I. DEFINITIONS

1) Notion de courbe Paramétrée

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$. Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies sur un même intervalle I. L 'ensemble des points $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ vérifiant : $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) \end{cases}, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$ est une courbe plane paramétrée de paramètre $\boldsymbol{t}$.

Remarque :

1) on désigne souvent par $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées et par $M(t)$ le point de paramètre t.On dit alors que $M(t)$ est un point mobile.

2) La courbe (C)décrite s'appelle en cinématique la trajectoire du mouvement.

3) Toute courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, $x \in I$ peut être considérée comme une courbe paramétrée ; pour cela il suffit de poser $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, t \in I$

Ex : $(C): y = lnx$, $x \in]0; +\infty[$ $(C): \begin{cases} x = t \\ y = lnt \end{cases}; t \in]0; +\infty[$

2) Equation cartésienne

Soit (C) une courbe plane paramétrée de paramètre t et dont le système d'équation est :$(C): \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in I$; s'il existe une relation liant x et y et caractérisant l'appartenance du point $M(x\,;y)$ à la courbe de (C) alors cette relation est une équation cartésienne de (C)

EX :$(C_1): \begin{cases} x = 3cost \\ y = 1 - 3sint \end{cases}; t \in IR$ $(C_2): \begin{cases} x = sint \\ y = cos2t \end{cases}; t \in IR$

II) VECTEUR DERIVE

1) Définition

Soit (C) une courbe paramétrée d'équation $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} t \in I$

Si f et g sont dérivables sur I alors le vecteur $\overrightarrow{v(t)} = f'(t)\vec{\imath} + g'(t)\vec{\jmath}$ s'appelle vecteur dérivé au point $M(t)$; le vecteur dérivé se note aussi $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Ex : $(C): \begin{cases} x(t) = sint \\ y(t) = cos2t \end{cases}; t \in IR$ $\begin{cases} x'(t) = cost \\ y'(t) = -2sin2t \end{cases}$; $M\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est le vecteur dérivé au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2) Notion de tangente

Soit $t_0 \in I$. Si f et g sont dérivables en t_0 et si le vecteur dérivé $\overrightarrow{V}(t_0)$ est non nul alors la droite passant le point $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}(t_0)$ est la tangente à la courbe (C) au point $M(t_0)$

Remarque :

On peut remplacer un vecteur dérivé par un vecteur non nul et de même sens. Un tel vecteur est appelé *vecteur tangent.*

Ex : Soit (C) : $\begin{cases} x = 3cost \\ y = 3sint \end{cases}$. Déterminer $M(0)$et $\overrightarrow{V(0)}$ $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\overrightarrow{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Le vecteur dérivé s'il n'est pas nul indique le sens du mouvement

III) SYMETRIE

1) Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la courbe paramétrée (C)définie par : (C): $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$; $t \in IR$

1) Dans quel demi- plan la courbe (C) est-elle incluse ?

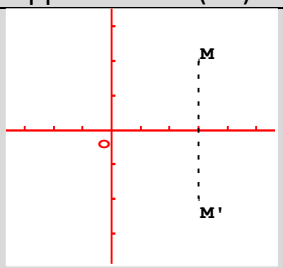
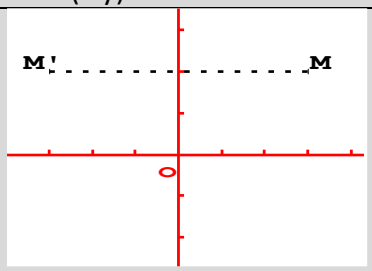
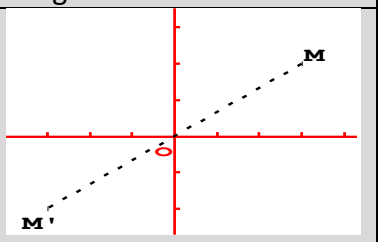
2) Que peut –on dire des points $M(t)$ et $M(-t)$? Que conclure pour cette courbe ?

3) En déduire qu'il suffit de connaitre la partie (C') de (C) pour $t \geq 0$ pour pouvoir tracer (C) entièrement.

4) donner une équation cartésienne de (C) pour $t \geq 0$ puis construire (C).

2) Synthèse

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe paramétrée (C) définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I$

Si	$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$
Alors (C) est	Symétrique par rapport à l'axe (Ox)	Symétrique par rapport à l'axe (Oy)	Symétrique par rapport à l'origine O
Dessin			

IV) EXEMPLES D'ETUDE D'UNE COURBE PARAMETREE

1) Exemple 1

On se propose d'étudier la courbe paramétrée définie par : (C): $\begin{cases} x = 3t^2 - 2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$; $t \in [-2\,;2\,]$

a) Symétrie

Comparer les points $M(t)$ et $M(-t)$. Que conclure pour cette courbe ?

b) Variations de x et y

Etudier les variations de x et y sur l'intervalle $[0\,;2\,]$. Dresser un tableau de variation conjoint de x et y

t	0		1	
$x'(t)$	0	+	6	+
	12			
$x(t)$	10			
			1	
	-2			
$y'(t)$	3	+	0	-
	-9			
$y(t)$			2	
	0			
	-2			

c) Tracé de la courbe

1ère étape :

On place les points correspondant aux valeurs du paramètre apparaissant dans le tableau de variation . Il s'agit de placer $M(0)$; $M(1)$ et $M(2)$

$M(0)\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$; $M(1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $M(2)\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$

2ème étape :

En chacun de ces points on trace le vecteur dérivé : $\vec{V}(0)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $\vec{V}(1)\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ $\vec{V}(2)\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$

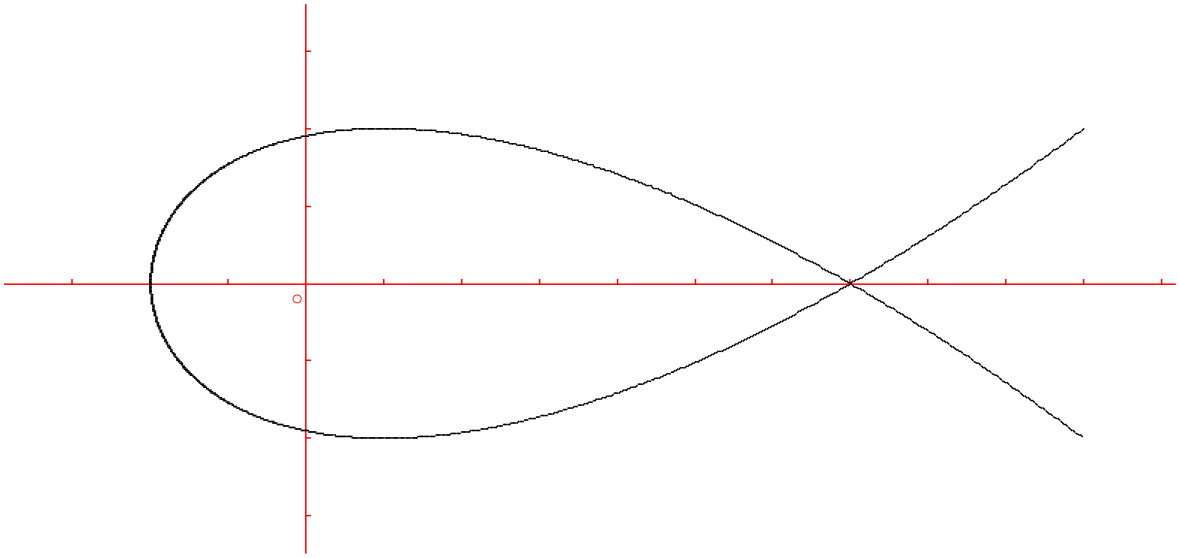
3ème étape :

On trace la courbe (C) sur les intervalles où x et y sont monotones toutes les deux. Il s'agit des intervalles [0,1] et [1,2].on complète par la symétrie par rapport à l'axe (ox).

Remarque :

Pour $t=\sqrt{3}$ ou $t=-\sqrt{3}$ on a $M(\sqrt{3})$; $M(-\sqrt{3})$ qui coïncident. Le point de coordonnées $(7\,;0)$est appelé point double car il est obtenu pour deux valeurs différentes du paramètre t.

Courbe



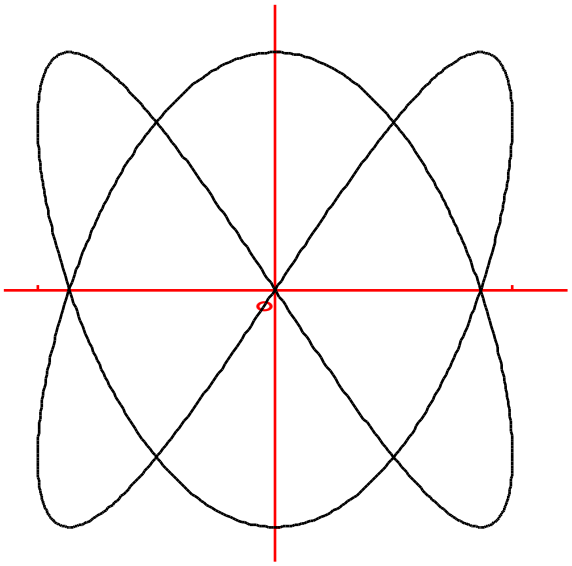
2) <u>Exemple 2</u>

Soit la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$ avec t ϵ IR.

x et y ont 2π pour période commune ; ainsi $M(t + 2\pi) = M(t)$;
$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O ;
$x(t + \pi) = x(t)$ et $y(t + \pi) = - y(t)$, donc $M(t)$ et $M(t + \pi)$ sont symétriques par rapport à (Ox).
Il suffit d'étudier la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'effectuer une symétrie par rapport à O puis une symétrie par rapport à (Ox) pour avoir toute la courbe.
On a $x'(t)$ = 2 cos 2t et $y'(t)$ = 3cos 3t et on remarque que la courbe est contenu dans un carré dont les côtés ont pour longueur 2 et sont parallèles aux axes. Le tableau de variation est le suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	2	+	1	+	0	—	-1	-	-2
y'	3	+	0	-	$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$	-	-3	-	0
X	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
Y			1						

	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ → 0 → 0 -1



3) Synthèse

Soit (C) la courbe plane définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I$

Si x et y sont dérivables sur le domaine d'étude, on détermine les variations de x et y à l'aide de x' et y' . Pour tracer la courbe (C) on place les points particuliers (intersection avec les axes, point ayant une tangente horizontale, une tangente verticale …).On relie ces points en utilisant le tableau de variation après avoir tracé le vecteur dérivé en chacun de ces points .On peut étudier la parité et la périodicité de x et y afin de déterminer d'éventuels éléments de symétrie. On réduit alors le domaine d'étude. Parfois on utilise d'autres propriétés des fonctions x et y pour la recherche des éléments de symétrie (voir selon l'énoncé).

T.D:COURBES PARAMETREES

EXERCICE 1

Soit (C) la courbe dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$ $t \in IR$

1°) Déterminer la période commune aux fonctions *x* et *y*.

2°) a) Comparer M(t) avec M(t + π) et M(-t).

b) En déduire que l'intervalle d'étude peut être réduit à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3°) Etudier les variations de *x* et *y* sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4°) Tracer (C).

EXERCICE 2

Soit (C) la courbe dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{3}\cos(2t)+\frac{2}{3}\cos t \\ y(t)=\frac{1}{3}\sin(2t) \end{cases} \quad t\in IR$$

1°) Montrer que l'on peut réduire l'ensemble d'étude à [0 ; π].

2°) Etudier les variations de *x* et *y*.

3°) Tracer (C).

Ch : **STATISTIQUE A DEUX VARIABLES**

I) Série statistique double

1) Définition

L'étude d'une population peut porter sur plusieurs caractères simultanément. Si on se limite à deux caractères quantitatifs, il correspond à chaque individu un couple de nombres. L'ensemble de ces couples constitue une série statistique double ou à deux variables

2) Exemple

Dans une classe de terminale, on peut relever la taille en cm et le poids en Kg de chaque élève

II) Tableaux d'effectifs ; Distributions marginales

1) Activité

Le tableau suivant donne la répartition des 300 membres d'un club sportif selon leur taille en cm et leur poids en Kg.

t	60	62,5	65	67,5	70	72,5	75	77,5	80	Total
160	4	3	2							
165		7	17	8	1					
170		2	20	30	17	4	1			
175			7	28	36	16	5	1		
180			1	6	19	22	10	4	2	
185					4	3	8	5	1	
190						2		2	2	
Total										

Ce tableau est un tableau statistique à deux variables qui sont : **le poids** et **la taille.**

1) Compléter la ligne « total » et la colonne « total »

2) a) Quelle est la signification du nombre 22 (ligne 180, colonne 72,5) ?

b) Quelle est la signification des cases vides ?

3) Combien y'a-t-il de membres pesant 72,5kg ? de membres mesurant 190cm ?

4) Que représente chacun des nombres de la ligne « total » et chacun des nombres de la colonne « total » ?

2) synthèse

La ligne « total » et la colonne « total » sont appelés **les marges du tableau**.

*72 membres ont un poids égal à 67,5 kg ; le rapport $\frac{72}{300} = 0{,}24$ s'appelle **la fréquence marginale** de la valeur 67,5 de la variable « poids ».

*De même la fréquence marginale de la valeur 165 de la variable « taille » est le rapport $\frac{33}{300} = 0{,}11$

III) Nuage de points ; Point moyen

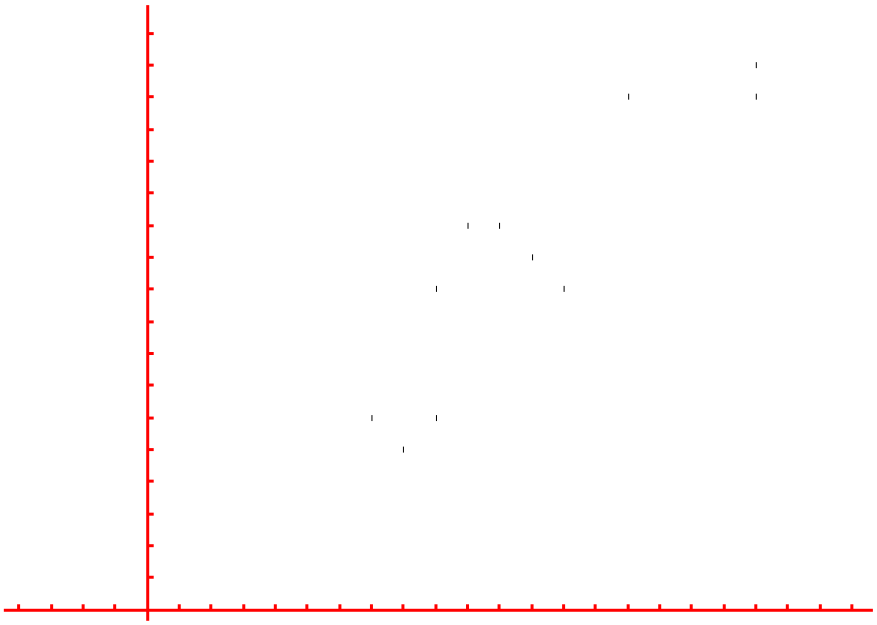
1) Activité

Le tableau suivant donne les notes sur 20 en maths et PC obtenues par 10 élèves choisis au hasard dans une classe de terminale.

Math(x)	15	9	19	8	10	9	19	7	11	13
PC(y)	16	6	16	5	12	10	17	6	12	10

1) Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenter les 10 points de coordonnées (x_i, y_i) ; ils forment **un nuage**.

2) Déterminer la position du point $G(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des valeurs x_i et y_i .Le point G s'appelle le point moyen du nuage.



Synthèse

L'étude simultanée des deux variables peut se faire à l'aide d'une représentation graphique. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il est possible d'associer à chaque couple (x_i, y_i) de la série le point $M_i(x_i, y_i)$

2) Définition

Etant donné une série statistique à deux variables (x , y), l'ensemble des points M_i (x_i , y_i) où les x_i sont les valeurs de la variable x et les y_i sont les valeurs de la variable y **s'appelle le nuage de points associés à cette série.** Le point $G(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes respectives des valeurs x_i et y_i **s'appelle le point moyen du nuage .**

Remarque

- Il est possible que certains couples soient égaux ; on effectue alors des regroupements et les moyennes sont alors des moyennes pondérées.
- Si les variables sont continues, leurs valeurs peuvent être regroupées en classes, les points du nuage auront pour coordonnées les centres des classes et ils seront pondérés par les effectifs correspondant à cette classe.

IV) Ajustement affine par des méthodes graphiques

1) Activité

Reprenons l'activité précédente.
1) Existe-t-il un lien, une dépendance entre la note en maths et la note en PC ? Réponse :
Pour rendre compte cette « dépendance » , tracer au mieux une droite passant par G et aussi près que possible des points du nuage. Trouver une équation pour cette droite.
2) Si un élève a 17 en maths ; à quelle note peut-il s'attendre en PC ?

2) Définition

Lorsque la forme d'un nuage de points laisse penser qu'on peut tracer une droite qui passe le plus près possible des points, on dit qu'on peut réaliser un "ajustement affine" ou linéaire. Une telle droite est appelée droite d'ajustement.
Autrement dit : lorsque les points du nuage sont groupés suivant une direction privilégiée, le lien (ou la corrélation) entre les deux variables est dit affine. On peut alors rendre compte de la tendance observée ajustant le mieux possible une droite suivant l'axe du nuage .On effectue dans ce cas un ajustement affine (on dit également par abus de langage ajustement linéaire).

3) Méthodes d'ajustement affine

a) Méthode du tracé au "jugé"

Au regard du nuage de points, on trace une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage.
Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle méthode ?

Réponse :

b) Méthode de l'utilisation du point moyen

On trace une droite qui passe par le point moyen et qui passe le plus près possible de tous les points du nuage. Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle méthode ?

Réponse :

c) Méthode du fractionnement ou méthode de MAYER

On partage le nuage de point en deux nuages partiels d'effectifs égaux, si le nombre de couples est impair, on met le couple central dans l'un ou l'autre. On détermine le point moyen de chaque nuage partiel .Soit G_1 le point moyen du premier nuage et G_2 celui du second nuage partiel ; la droite d'ajustement est alors la droite (G_1G_2). Déterminer une équation de cette droite.

$G_1(x_1 ; y_1)$ et $G(x_2 ; y_2)$ (G_1G_2) : y= ax+b $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ et $b = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$

La droite d'ajustement (G_1G_2) *a pour équation* : $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs associés à $\mathcal{E}$.

1) Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0 \ \ si \ \ \vec{u} = \vec{O} \ \ ou \ \ \vec{v} = \vec{O} \\ \vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) \ \ si \ \ \vec{u} \neq \vec{O} \ \ et \ \ \vec{v} \neq \vec{O} \end{cases}$$

Propriété : Pour tout triplet $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ d'éléments de $\mathcal{V}$ et pour tout couple (α , β) de nombres réels : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et $\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right).\vec{w} = \alpha\left(\vec{u}.\vec{w}\right) + \beta\left(\vec{v}.\vec{w}\right)$

2) Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{V}$.

II. REPERES ORTHONORMAUX DIRECTS DE L'ESPACE

1) Repères orthonormaux de l'espace

a- Définitions

Définition 1 : On appelle base orthonormale de $\mathcal{V}$, tout triplet $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de vecteurs tels que :

$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$

Définition 2 : On appelle repère orthonormal de l'espace affine $\mathcal{E}$ tout quadruplet $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ où O est un point de $\mathcal{E}$ appelé origine et $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base orthonormale de $\mathcal{V}$

b- Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base orthonormale de $\mathcal{V}$, $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) , $\vec{v}$ de coordonnées (x', y', z') dans cette base.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) Orientation de l'espace

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace $\mathcal{E}$. En appliquant la « règle de l'observateur d'Ampère », deux situations se produisent :

Situation 1 : L'observateur placé sur [Oz) regardant [O*x*) a [Oy) sur sa gauche : le repère est direct

Situation 2 : L'observateur placé dans les mêmes conditions a [Oy) sur sa droite : le repère est indirect.

Exemple : Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormal direct.

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, $\left(O;\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right)$, $\left(O;\vec{k},\vec{i},\vec{j}\right)$. sont des repères directs.

$\left(O;\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right)$, $\left(O;\vec{k},\vec{j},\vec{i}\right)$, $\left(O;\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right)$ sont des repères indirects.

III. PRODUIT VECTOREL

1) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\vec{k}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

2) Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace, on a :

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}\wedge\vec{u}$

$\left(\alpha\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\left(\alpha\vec{v}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

3) Expression analytique du produit vectoriel

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe de $\mathscr{V}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x ,y, z) et (x', y', z') alors :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-y'z)\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}$$

Disposition pratique :

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}=d_1\vec{i}-d_2\vec{j}+d_3\vec{k}$ avec $d_1=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=yz'-y'z$; $d_2=\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=xz'-x'z$

et $d_3=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exercice d'application : Soit A(1,2,3) , B(0,1,-1) , C(-2,1,1). Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

4) Produit vectoriel et calculs d'aires et de distances

a- Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle. L'aire de ABC est donnée par la formule : $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right\|$

b- Aire d'un parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme. Son aire est $\mathscr{A}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

c- Distance d'un point M à une droite (D)

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (D). Alors la distance de M à (D) est :

d = $\frac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ avec A un point de (D).

d- Distance d'un point M à un plan (ABC)

La distance du point M au plan (ABC) est $\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

PROBABILITES

I. ANALYSE COMBINATOIRE

1) Cardinal d'un ensemble fini

Définition : Soit E un ensemble fini de *n* éléments ; E = {e_1 , e_2 , … , e_n }. Le nombre entier *n* est appelé le cardinal E, noté Card E.

Si E = Ø , on posera Card E = 0.

Propriétés :

P_1 : Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors A ∪ B est un ensemble fini et on a Card(A ∪ B) = CardA + CardB.

P_1 : Si A et B sont deux ensembles finis, alors A ∪ B est un ensemble fini et on a Card(A ∪ B) = CardA + CardB - Card(A ∩ B).

Exemple : Dans une classe de Terminale, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand. 30 élèves étudient l'anglais, 20 l'allemand et 15 l'anglais et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves dans la classe ?

Solution : Soit E l'ensemble des élèves de la classe, A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais et B l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand.

Card A = 30 ; Card B = 20 ; Card(A∩B) = 15 et E = A∪B

Card E = Card A + Card B – Card (A∩B) = 30 + 25 – 15 = 35

2) p-liste d'éléments d'un ensemble fini

a- Définition

Soit A un ensemble fini non vide, p un nombre entier naturel supérieur ou égal à un. On appelle p-liste d'éléments de A toute liste (x_1, x_2, …,x_p) où x_1 , x_2 , …, x_p sont tous éléments de A.

L'ensemble de ces p-listes sera noté A^p .

Exemple : On joue sept fois à pile ou face, et l'on note à chaque lancer le résultat apparu (P pour pile, F pour face). Un résultat de cette expérience est une succession de P ou F, par exemple (P,F,F,P,P,P,F) ; les résultats possibles sont des 7-listes de l'ensemble {P , F}.

b- Propriété

Soit n et p deux nombres entiers supérieurs ou égaux à un, A un ensemble fini non vide de cardinal n.

L'ensemble A^p des p-listes d'éléments de A a pour cardinal n^p.

Exemple : On se propose de mettre 5 lettres dans 3 boites, chaque boite pouvant contenir zéro ou plusieurs lettres. Appelons B_1 , B_2 , B_3 les trois boites.

(B_2 , B_1 , B_1 , B_3 , B_2) signifie que la première lettre est mise dans la boîte B_2, la deuxième lettre et la troisième sont dans la boîte B_1 , la quatrième dans la boîte B_3 et la cinquième dans la boîte B_2.

Il y aura autant de rangements possibles que de 5-listes d'éléments de $\{B_1,B_2,B_3\}$, soit $3^5 = 243$ rangements possibles.

3) Arrangement de p éléments d'un ensemble fini

a- Définition

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à un, A un ensemble fini non vide.

On appelle arrangement de p éléments de A toute p-liste formée d'éléments deux à deux distincts de A.

b- Propriété

Soit n et p des nombres entiers tels que $1 \leq p \leq n$, E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E, noté A_n^p , est donné par : $A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$.

Exemple : Une société de voyage burkinabè propose aux touristes pressés une formule : « l'Afrique en huit jours ». Il s'agit de visiter 4 capitales africaines en passant deux jours dans chaque ville. Ces capitales sont à choisir parmi Dakar, Abuja, Accra, Libreville, Pretoria, Rabat suivant le goût du client. Combien y a-t-il de formules possibles ?

Réponse : Un trajet est un arrangement de 4 éléments de l'ensemble A formé par les 6 villes. Pour la 1ère étape, il y a 6 choix possibles, 5 pour la 2ème , 4 pour la 3ème et 3 pour la 4ème . Il y a donc 6x5x4x3 formules possibles.

Permutation :

Soit n un entier naturel non nul, A un ensemble de cardinal n.

On appelle permutation de A tout arrangement de n éléments de A.

Exemple : Soit E = {a, b,c}. Les permutations de E sont (a,b,c) , (a,c,b) , (b,a,c) , (b,c,a) , (c,a,b) , (c,b,a).

Propriété : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On appelle factorielle n le nombre, noté n ! défini par : n ! = n.(n-1)….2.1 : C'est le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal n.

Exercice d'application : Combien le prénom « MARIE » a- t-il d'anagrammes ? (Réponse : 5 !).

4) Combinaison de p éléments d'un ensemble fini

a- Définition

Soit n un entier naturel non nul, p un entier compris entre zéro et n.

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble A fini de cardinal n toute partie de A ayant p éléments.

Remarques :

- Une combinaison d'éléments de A est formée d'éléments distincts deux à deux.
- Il n'y a pas d'ordre dans l'énumération des éléments d'une combinaison.

Exemple : Soit A = {a,b,c} un ensemble de 3 éléments. Les parties de A à deux éléments sont : {a,b} , {a,c} ,{b,c}.

b- Propriété

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($1 \leq p \leq n$) est noté C_n^p et on a $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

5) Expression de A_n^p et C_n^p à l'aide de factorielles

Soit n et p deux nombres entiers tels que $0 \leq p \leq n$. On a :

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^p = C_n^{n-p}$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n!$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $A_n^1 = n$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

II. CALCULS DE PROBABILITE

1) Le langage des évènements

a- Expérience aléatoire

Exemple 1 : On lance un dé et on observe le numéro qui apparait : 6 résultats sont possibles : 1,2,3,4,5,6. On dit qu'on a réalisé une expérience ou une épreuve aléatoire comportant 6 éventualités et que l'univers associé à cette expérience aléatoire est Ω = {1,2,3,4,5,6}.

Exemple 2 : Une urne contient des boules blanches (B), rouges (R) et noires (N). On tire une boule dans cette urne et on note la couleur obtenue ; 3 résultats sont possibles : B,R et N. On a 3 éventualités et Ω = {B,R,N}.

b- Evénements liés à une expérience aléatoire

Définitions

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle événement toute partie de Ω.
- On appelle événement élémentaire tout singleton de Ω.

Exemple :

On lance un dé et on observe le numéro qui apparait.

« obtenir un nombre pair » est l'événement {2,4,6}.

« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire {2}.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient 4 lors du lancer d'un dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.

Signification des expressions

Vocabulaire des événements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Eventualité	Elément de Ω	$\omega \in \Omega$
Evénement	Partie de Ω	$A \subset \Omega$
Evénement élémentaire	Singleton	{ω}
Evénement certain	Partie pleine	Ω
Evénement impossible	Partie vide	Ø
Evénement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Evénement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Evénements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \emptyset$
Evénement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

Exemples

On lance un dé et on observe le numéro qui apparait. On considère les événements suivants :

A : « obtenir un nombre pair »

B : « obtenir un nombre premier »

C : « obtenir 6 »

$A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$; événement « obtenir un nombre pair ou premier »

$A \cap B = \{2\}$: « obtenir un nombre pair et premier »

Les événements B et C sont incompatibles.

$\overline{A} = \{1,3,5\}$; événement « obtenir un nombre impair »

2) Probabilité d'un évènement

a- Introduction

On lance un dé bien équilibré et on note le numéro qui apparait ; l'univers associé à cette épreuve est Ω = {1,2 ,3,4,5,6}.

L'événement {2} a une chance sur 6 d'être réalisé : on dit que la probabilité de cet événement est 1/6

La probabilité de {1 ;5} est 1/3

« obtenir un nombre pair » est l'événement {2,4,6} dont la probabilité est ½

La probabilité de l'événement certain est 1.

La probabilité de l'événement impossible est 0.

b- Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers [0 ;1], qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- La probabilité de l'événement certain est 1
- La probabilité de l'événement impossible est 0.

Exercice d'application : On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotés de 1 à 6, et on note le numéro apparu. La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de celle d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deus nombres de même parité sont égales.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.
2) Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?

Réponse : Ω = {1,2,3,4,5,6}

1) Soit p la probabilité d'apparition d'un nombre pair et q celle d'un nombre impair. p = 2q, or P(Ω) = 1 donc 3p + 3q = 1, ce qui donne q = $\frac{1}{9}$ et p = $\frac{2}{9}$

ω	1	2	3	4	5	6
P(ω)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2) P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = $\frac{2}{3}$

c- Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :

- Si A ∩ B = Ø alors P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- ***Exercice d'application :*** Une urne contient 15 boules numérotées de 1à 15. On tire au hasard $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

une boule et on note son numéro N. Les boules ont la même probabilité d'être tirée. On désigne par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».

Calculer les probabilités des événements A, B, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $A \cup B$

Réponse : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$; $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$

$B = \{3,6,,9,,12,15\}$; $A \cap B = \{6,12\}$

Pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{15}$

$P(A) = 7 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$; $P(B) = 5 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{8}{15}$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$;

$P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{15} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}$

d- Evénements indépendants

Définition :Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Deux événements A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exercice d'application : Une classe comprend 9 filles et 36 garçons. A une demande de volontaires pour former une équipe de football mixte, on a obtenu les réponses suivantes :

	Filles	Garçons	Total
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Total	9	36	45

On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements suivants :
F : « l'élève choisie est une fille » et V : « l'élève choisi est volontaire »

On a $P(F) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$; $P(V) = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$ et $P(F \cap V) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$

$P(F \cap V) \neq P(F).P(V)$ donc les événements F et V ne sont pas indépendants.

Propriété : Si n expériences aléatoires sont indépendantes alors, pour tout événement A_1 , A_2 , …, A_n de chacun des univers associés à ces épreuves, on a : $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n)$

e- Equiprobabilité

Définition : Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Propriété : Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A on a : $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$

Remarque : Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de Ω cas possibles. On écrit souvent : $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exercice d'application :On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer 2 rois ?

Réponse : $p = \frac{C_4^2 \times C_{28}^3}{C_{32}^5}$

3) Probabilité conditionnelle

a- Exemple

Dans une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 , 4, on prélève deux boules au hasard simultanément.

1) Quel est l'univers des possibilités Ω associé à cette expérience ? Quelle est la probabilité des différents résultats possibles ?
2) Soit les événements suivants :

- A : « une des boules extraites est marquée 1 »
- B : « la somme des nombres inscrits sur les boules extraites est supérieure ou égal à 5 »

Quelles sont les probabilités des événements A et B ?

3) On suppose que l'événement A est réalisé.
   a) Quel est l'univers des possibilités ?
   b) Calculer $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Solution :

1) $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$. La probabilité des différents résultats possibles est $p = \frac{1}{6}$.

2) A = {{1,2},{1,3},{1,4}} et B = {{1,4},{2,3},{2,4}{{3,4}} donc P(A) = $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$:

P(B) = $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

3) a) L'univers des possibilités est A

b) $A \cap B$ = {{1,4}} donc $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

b- Définition

Soit P une probabilité sur un univers des possibles Ω et soit A un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $P_A(B)$ ou P(B/A), défini par $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Cas particuliers :

- Si $A \subset B$, on a $A \cap B = A$, d'où $P_A(B) = 1$
- Si $B \subset A$, on a $A \cap B = B$, d'où $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)}$

c- Propriétés

1. Pour tout événement B, $P_A(B) \geq 0$
2. $P_A(\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$
3. Si B_1 et B_2 sont deux événements incompatibles, alors $P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2)$

Démonstration : $P_A(B_1 \cup B_2) = \frac{P(A\cap(B_1\cup B_2))}{P(A)}$ or $A\cap(B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$ d'où $P_A(B_1 \cup B_2) = \frac{P\left((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\right)}{P(A)}$. Comme de plus $(A\cap B_1)\cap(A\cap B_2)=\varnothing$, on a $P_A(B_1\cup B_2) = \frac{P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)}{P(A)}$ soit $P_A(B_1\cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2)$.

d- Probabilité d'une intersection

Soit P une probabilité sur un univers des possibles Ω, et soit A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B, on a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, soit $P(A \cap B) = P(A).P_A(B)$.

Exemple : Dans une urne contenant 6 boules noires et 4 boules blanches, on effectue deux prélèvements successifs d'une boule sans remise. Soit A l'événement : « la première boule tirée est blanche » et B l'événement : « la seconde boule tirée est noire .»

On a : $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P_A(B)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant 6 boules noires et 3 boules blanches : d'où $P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Il s'ensuit : $P(A \cap B) = P(A).P_A(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

Remarque : Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a : $P(A \cap B) = P(A).P_A(B) = P(B).P_B(A)$.

III. LE SCHEMA DE BERNOULLI- LA DISTRIBUTION BINOMIALE

1) Le schéma de Bernoulli

Considérons une expérience aléatoire E admettant deux issues et deux seulement, que nous convenons d'appeler succès (S) et échec ($\overline{S}$). On a : P(S) = p et $P(\overline{S}) = q = 1 - p$. Une telle expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

Si nous répétons cette expérience en revenant à chaque fois aux conditions initiales, les résultats d'une expérience ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes. On dit alors que cette répétition d'expériences identiques correspond à un schéma de Bernoulli.

2) La distribution binomiale

Considérons une épreuve constituée d'une suite de n expériences de Bernoulli, c'est-à-dire identiques et dont les résultats sont indépendants. Pour chacune d'entre elles, la probabilité du succès est p, celle de l'échec est $q = 1 - p$. Toute issue de cette épreuve est un n-uplet formé des éléments S et $\overline{S}$. Soit A_k l'événement : « obtenir k succès au cours des n expériences.»

A_k est la réunion de tous les n-uplets formés de k éléments S et de (n – k) éléments $\overline{S}$; le cardinal de A_k est, par conséquent, C_n^k . On a $P(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On dit que le nombre de succès suit une distribution binomiale de paramètre (n,p) qu'on note *B(n,p)*.

Exercice d'application

Un examen sous forme de QCM comporte cinq questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles sont proposées quatre réponses dont une seule est la bonne. Un candidat se présente à l'examen sans avoir travaillé le moindre sujet et répond par conséquent au hasard à chaque question.

Calculer la probabilité pour que le candidat soit admis sachant que pour cela, il doit répondre exactement à au moins trois questions.

Solution

L'examen est une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour chacune d'entre elles, désignons par S le fait que le candidat réponde exactement à la question. On a P(S) = $\frac{1}{4}$ et P($\overline{S}$) = $\frac{3}{4}$.

A_k : « le candidat répond exactement à k questions » ; B : « le candidat est admis ». B = $A_3 \cup A_4 \cup A_5$ or A_3, A_4 et A_5 sont incompatibles, d'où P(B) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).

A_k suit une distribution binomiale de paramètre n = 5 et p = $\frac{1}{4}$ donc P(A_k) = $C_5^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$.

P(B) = $C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0$ = 0,10.

IV. VARIABLES ALEATOIRES

1) Activité

On considère le jeu de dé suivant à deux joueurs A et B. Un dé est lancé : si on obtient un résultat pair alors A donne 30 francs à B, si le résultat est 1 ou 5 alors B donne 50 francs à A, si le résultat est 3 la partie est nulle.

1°) Quel est l'ensemble Ω des issues possibles du lancer et l'ensemble E des gains possibles du joueur A ?

2°) On désigne par X la fonction de Ω vers E qui à tout élément de Ω associe le gain correspondant dans E.

a) Représenter X par un diagramme sagittal.

b) Compléter le tableau suivant :

Résultat du lancer	1	2	3	4	5	6
Gain du joueur A	5	-3	0	-3	5	-3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Solution

1°) Ω = {1,2,3,4,5,6} E = { - 3 ;0 ;5}

2°) a)

c) P((X = - 3)) = P({2,4,6}) = $\frac{1}{2}$; P((X = 0)) = P({3}) = $\frac{1}{6}$

P((X = 5)) = P({1,5}) = $\frac{1}{3}$

2) Variable aléatoire. Loi de probabilité

a- Variable aléatoire

Ω étant l'univers associé à une épreuve aléatoire, toute application X définie sur Ω et à valeurs dans IR est une variable aléatoire.

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est appelé univers-image, et est noté X(Ω). Exemple : X(Ω) = {-3,0,5}.

b- Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire X, l'application qui, à tout réel x_i de X(Ω), associe la probabilité, notée p_i, de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque :

- On représente généralement une loi de probabilité par un tableau de la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n	1

- Les événements $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, …, $(X = x_n)$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω. D'après la propriété d'additivité :

$p(\Omega) = p\left[\left(X = x_1\right) \cup \left(X = x_2\right) \cup ... \cup \left(X = x_n\right)\right]$

$p(\Omega) = p\left(X = x_1\right) + p\left(X = x_2\right) + ... + p\left(X = x_n\right)$

$1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Exercice d'application : On dispose de dix boules, cinq rouges et cinq blanches indiscernables au toucher et de deux urnes identiques U et V. On place une boule blanche dans l'urne U et les neuf autres boules dans l'urne V. Un joueur choisit au hasard l'une des urnes et extrait ensuite, toujours au hasard, une boule de cette urne. Si la boule extraite est blanche, le joueur gagne 30 francs, si elle est rouge il perd 70 francs. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur. Quelle est la loi de probabilité de X ?

Solution :

Soient U : « le joueur a choisi l'urne U » ; V : « le joueur a choisi l'urne V » ; R : « tirer une boule rouge » ; B : « tirer une boule blanche »

$P(U) = P(V) = \frac{1}{2}$; $P_U(B) = 1$; $P_U(R) = 0$; $P_V(B) = \frac{4}{9}$; $P_V(R) = \frac{5}{9}$

P(B) = $P(B \cap U) + P(B \cap V)$ = P(U).P_U(B) + P(V).P_V(B) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{13}{18}$. De même P(R) = $\frac{5}{18}$. Donc

P(X = - 70) = $\frac{5}{18}$; P(X = 30) = $\frac{13}{18}$

x_i	-70	+30	Total
P(X = x_i)	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$	1

3) Fonction de répartition

a- Définition

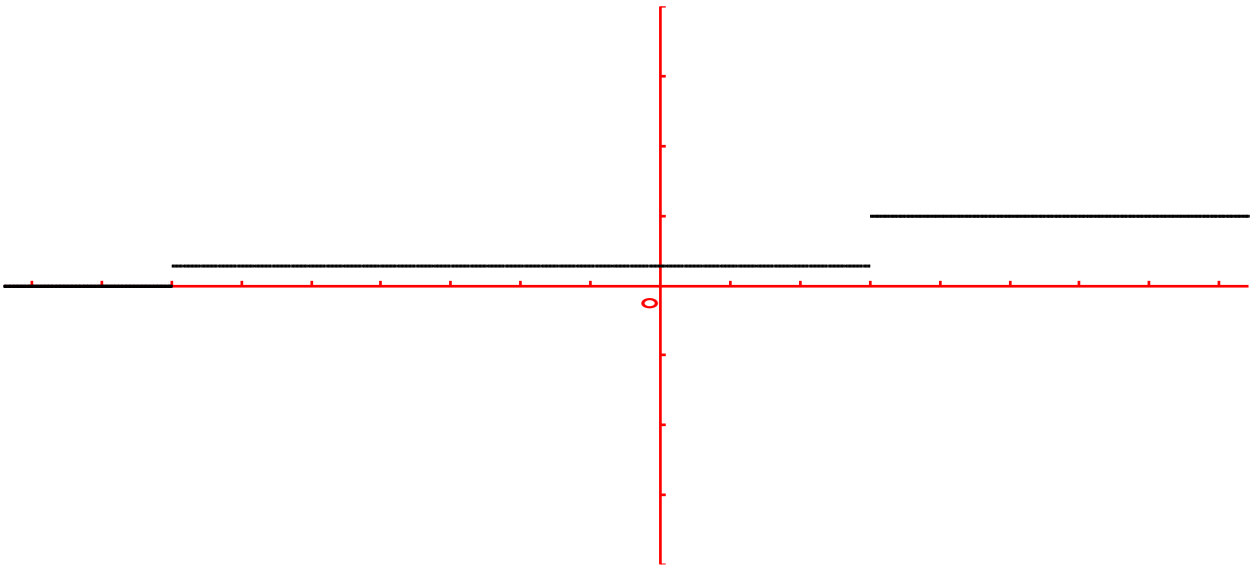
X étant une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition de X la fonction F, définie de IR vers [0 ;1] par : F(x) = p(X ≤ x).

b- Exemple

Si on considère le jeu de l'urne précédent, on a :

- Si x < - 70 , (X ≤ x) est impossible, donc F(x) = 0
- Si – 70 ≤ x < 30 , (X ≤ x) = (X = -70) , F(x) = $\frac{5}{18}$
- Si x ≥ 30, (X ≤ x) = (X = - 70) ∪ (X = 30) et F(x) = $\frac{5}{18} + \frac{13}{18} = 1$

Représentation graphique :



c- Propriétés de la fonction de répartition

P_1 : Supposons que les valeurs x_1 , x_2 , …, x_n prises par la variable aléatoire X sont classées dans l'ordre croissant ($x_1 < x_2 < \ldots < x_n$).

- Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$
- Si $x \geq x_n$, alors $F(x) = 1$
- Si $1 \leq i \leq n$ et $x_i \leq x < x_{i+1}$ alors $F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$

P_2 : Si F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X et si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors : $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

4) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Soit $\{x_1 , x_2 , \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

Pour tout entier i, tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $p_i = p(X = x_i)$. On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X, le réel noté E(X), défini par : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Exemple : jeu de l'urne

x_i	-70	+30	Somme
p_i	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$	1
x_ip_i	$\frac{-350}{18}$	$\frac{390}{18}$	$\frac{40}{18} = \frac{20}{9}$

On a donc $E(X) = \frac{20}{9}$

5) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Soit $\{x_1, x_2 ,\ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X dont l'espérance mathématique est E(X). Pour tout entier i, tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $p_i = p(X = x_i)$.

On appelle variance de X, le réel positif, noté V(X), défini par :$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$ ou encore selon le théorème de Koenig, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$